

Examen PAU Física 2024 - 2025

Castilla La Mancha

Problema 1

Nos encontramos en una nave espacial de masa 9×10^4 kg sobre la superficie del planeta Saturno. Sabemos que el radio de este planeta es de $5,82 \times 10^4$ km, su masa de $5,68 \times 10^{26}$ kg y su periodo de rotación de 10 horas y 34 minutos.

Elige dos apartados a realizar:

a) (1,25 puntos) Calcula el valor de la gravedad en la superficie de Saturno y la velocidad que necesita la nave para abandonar el planeta. Deduce razonadamente las expresiones.

b) (1,25 puntos) Suponer que se lanza la nave verticalmente y sus motores se apagan justo cuando se encuentra a una altura de 2 veces el radio de Saturno sobre su superficie con velocidad de 1 km/s. Determinar a qué altura (en km) se parará antes de volver a caer sobre Saturno.

c) (1,25 puntos) Se quiere lanzar la nave para que orbite alrededor de este planeta de forma geoestacionaria (manteniéndose siempre en la vertical sobre un punto sobre la superficie del planeta). Deducir y calcular la altura a la que orbitará la nave.

Datos: $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$.

a) La gravedad se define como la aceleración que sufre un cuerpo causado por la fuerza de la gravedad. Haciendo uso de la segunda ley de Newton y la ley de Gravitación universal, igualando y particularizando para los valores del enunciado obtenemos:

$$F = ma = \frac{GmM}{R^2} \Rightarrow a = g = \frac{GM}{R^2} = 11,18 \text{ m/s}^2$$

Recordamos que todas las unidades usadas en los enunciados deben convertirse a su unidad correspondiente del sistema internacional (SI).

Para la velocidad que necesita para escapar del planeta (llamada comúnmente velocidad de escape) es aquella que necesita el cuerpo para "llegar al infinito" con velocidad nula. Si utilizamos la conservación de la energía en este caso, entre la superficie del planeta y el infinito:

$$E_{m1} = E_{m2}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_\infty^2 - \frac{GMm}{R_\infty}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Como se observa la energía en el infinito es nula por las condiciones impuestas, lo que nos permite despejar la velocidad de escape, la cual para los datos del problema obtenemos:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 36081 \text{ ms}^{-1}$$

b) De nuevo, haciendo uso de la conservación de la energía entre el punto de altura del doble del radio del planeta (lo que quiere decir a una distancia de tres veces el radio desde el centro) y donde calcularemos altura a la que llegaría la nave con velocidad nula.

$$E_{m1} = E_{m2}$$

$$\frac{1}{2}v^2 - G\frac{M}{3R} = -G\frac{M}{R_2}$$

$$R_2 = 1,75 \times 10^8 \text{ m}$$

La altura sobre superficie es: $h_2 = R_2 - R$

$$h_2 = 1,75 \times 10^8 - 5,82 \times 10^7 = 1,168 \times 10^8 \text{ m}$$

$$h_2 \approx 116800 \text{ km}$$

c) Haciendo uso de la Tercera Ley de Kepler, y teniendo en cuenta que una órbita geoestacionaria es aquella que posee como periodo el mismo que el de rotación del planeta, podemos escribir:

$$r_3 = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}$$

Hallar el periodo de rotación en segundos:

$$T = (10 \text{ horas} \times 60 \text{ min/hora} \times 60 \text{ s/min}) + (34 \text{ min} \times 60 \text{ s/min}) = 38040 \text{ s}$$

Si se utiliza un periodo de 24 horas se considerará como error leve.

$$r_3 = 1,12 \times 10^8 \text{ m}$$

$$h_3 = r_3 - R = 5,34 \times 10^7 \text{ m}$$

Problema 2

En un espectrómetro de masas, dos partículas cargadas, P_1 y P_2 , de masas iguales $m = 5 \times 10^{-6}$ kg, entran en una región donde existe un campo magnético uniforme perpendicular ($B = 0,50$ T) orientado según se indica en la figura (el aspa indica que $\vec{B}$ entra hacia dentro de la hoja).

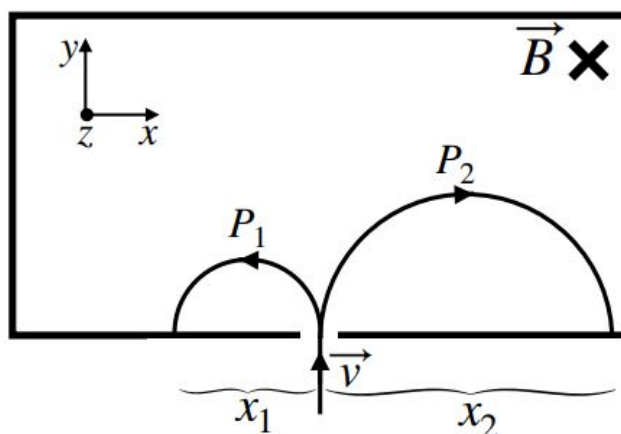
A su entrada, las dos partículas tienen la misma velocidad, $v = 100$ m/s. Una vez dentro, las partículas se separan siguiendo las trayectorias semicirculares indicadas, siendo $x_1 = 10$ cm (partícula P_1) y $x_2 = 40$ cm (partícula P_2).

Elige dos apartados a realizar:

a) (1,25 puntos) Explicar razonadamente el signo de la carga de cada partícula y determinar el valor de dichas cargas.

b) (1,25 puntos) Calcular la aceleración debida a la fuerza magnética que actúa sobre cada una de las partículas y determinar el tiempo invertido por las partículas en recorrer su respectiva trayectoria semicircular.

c) (1,25 puntos) En este experimento se tiene la posibilidad de incluir un campo eléctrico dentro de la parte recuadrada. Especificar el vector campo eléctrico para que las partículas al entrar en el recuadro sigan una trayectoria rectilínea y no se desvíen.



a) Para comprender la diferencia de dirección de giro de la partícula debemos relacionar el giro con la dirección de una fuerza centrípeta, generada por la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Como se observa la fuerza apunta hacia el centro del círculo, dado por el producto vectorial. Como las velocidades y B apuntan según el sistema de referencia mostrado:

$$\vec{v} = 100 \hat{j} \quad ; \quad \vec{B} = -0,5 \hat{k}$$

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 \end{vmatrix} = 50 \hat{i}$$

Luego la fuerza es hacia abajo para cargas positivas (caso P_2) y hacia arriba para cargas negativas (caso P_1).

Si queremos calcular la carga debemos igualar esta fuerza a la Segunda Ley de Newton. Una fuerza centrípeta. Despejando y sustituyendo datos para cada carga:

$$F_c = \frac{mv^2}{R} = qvB \Rightarrow q = \frac{mv}{RB}$$

Caso P₁: $R = x_1/2 = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m} \Rightarrow q_1 = 0,02 \text{ C}$

Caso P₂: $R = x_2/2 = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m} \Rightarrow q_2 = 0,05 \text{ C}$

b) La aceleración centrípeta que ya se ha comentado, viene dada por la siguiente expresión:

$$a_c = \frac{v^2}{R} \Rightarrow a_{c1} = 2 \times 10^5 \text{ m/s}^2 ; a_{c2} = 5 \times 10^4 \text{ m/s}^2$$

El tiempo invertido en recorrer la semicircunferencia equivale al semiperíodo del movimiento de giro (un periodo corresponde a un giro completo). Teniendo esto en cuenta:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{v}$$

$$t_1 = \frac{T_1}{2} = 1,57 \times 10^{-3} \text{ s} ; t_2 = \frac{T_2}{2} = 6,28 \times 10^{-3} \text{ s}$$

c) Si no se produce desviación de las partículas será debido a que el campo eléctrico produce una fuerza en dirección opuesta a la de Lorentz:

$$\vec{F}_e = \vec{F}_m$$

$$q\vec{E} = q\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow |\vec{E}| = |v \times B|$$

Mientras que la relación de módulos es simplemente la multiplicación mostrada, el signo nos indica que debe haber dirección opuesta a la fuerza magnética, que recuerdan que tenía dirección $+\hat{i}$ para el campo necesario para cumplir la condición. El sentido del E es independiente del signo de q. Aplicando la regla de mano derecha.

$$\vec{E} = 50 \hat{i} \text{ N/C}$$

Observemos como este campo no depende del signo de la carga, sino que es igual para ambas. Esto se debe a que produce una fuerza en la carga positiva hacia la izquierda y una en la carga negativa hacia la derecha, tendiendo ambas a corregir sus trayectorias hasta rectificarlas.

Problema 3

A una distancia de 5 cm a la izquierda de una lente divergente de 10 dioptrías de potencia, se sitúa un objeto de 10 cm de altura.

Elige dos apartados a realizar:

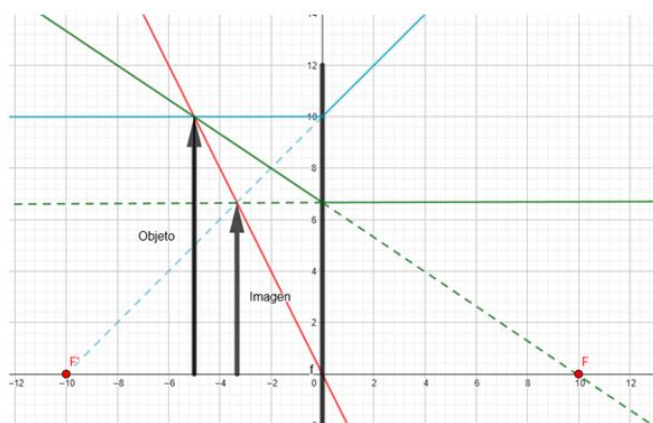
a) (1,25 puntos) Realizar un trazado de rayos para localizar la posición y el tamaño de la imagen, explicando las reglas de trazado para los rayos que uses. Indica las características de la imagen.

b) (1,25 puntos) Determinar numéricamente la posición de la imagen y su tamaño, así como el aumento lateral de este sistema óptico.

c) (1,25 puntos) Si sustituimos la lente por una lente convergente con la misma potencia, calcular la posición de la imagen y su tamaño. Realizar un trazado de rayos para ilustrarlo, indicando razonadamente si la imagen es real o virtual.

a) Debemos comenzar por conocer la distancia focal o distancia al foco de la lente, que se obtiene mediante la potencia con la relación:

$$f = \frac{1}{D} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ m} = 10 \text{ cm}$$



Las reglas del trazado de rayos las podemos dividir en los tres rayos principales mostrados:

Rayo Rojo: Pasa por el objeto y el centro de la lente, no se desvía.

Rayo Azul: Pasa por el objeto de forma paralela al eje óptico (horizontal), y se desvía hacia F' . Al encontrarse a la izquierda de la lente, sería un rayo virtual, y el real diverge en la dirección contraria a la derecha.

Rayo Verde: Pasa por el objeto y F , sale de forma paralela, en este caso sin llegar a alcanzar el foco, formando una imagen virtual a la izquierda.

Se formará una imagen a la izquierda de la lente (**virtual**), **derecha** ya que posee la misma dirección que el objeto, y **reducida** al ser más pequeña que éste.

b) Para determinar numéricamente necesitamos conocer que en las lentes divergentes (negativas) $f = -10$ cm y que la distancia al objeto positivo $d_o = +5$ cm (negativo $d_i = -$):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d'_i} \Rightarrow \frac{1}{-10} = \frac{1}{5} + \frac{1}{d'_i} \Rightarrow d'_i = -3,33 \text{ cm}$$

Para obtener su tamaño relacionamos con el aumento transversal:

$$\frac{y_i}{y_o} = -\frac{d'_i}{d_o} \Rightarrow y'_i = \frac{20}{3} = 6,67 \text{ cm}$$

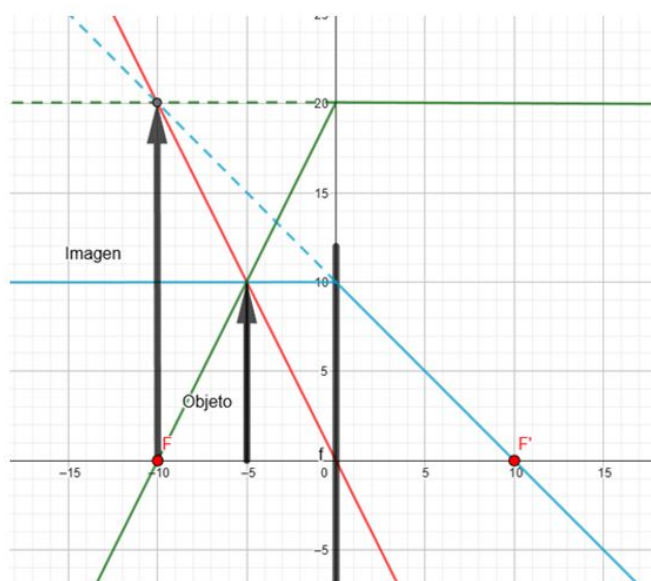
Como comprobamos ambos resultados son consistentes con el trazado.

c) En el caso de una lente convergente (positiva) la fórmula es la misma utilizada con la divergente, pero esta vez $f' = +10$ cm, con el resto de los datos invariantes:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d'_i} \Rightarrow \frac{1}{+10} = \frac{1}{5} + \frac{1}{d'_i} \Rightarrow d'_i = -10 \text{ cm}$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{d'}{d} \Rightarrow y' = \frac{20}{5} = 20 \text{ cm}$$

La imagen será virtual, derecha y aumentada, por los mismos criterios mostrados en el apartado a). Podemos comprobar la veracidad de nuestras afirmaciones realizadas del trazado de rayos.



CUESTIONES (2.5 puntos)

Elegir 2 de las siguientes cuestiones:

a) (1.25 puntos) La función de trabajo de un electrodo de aluminio es de 4,08 eV. Determinar la frecuencia umbral de este metal para producir efecto fotoeléctrico y la energía cinética que tendrán los electrones emitidos si se ilumina con una radiación ultravioleta de 250 nm.

Datos: $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J s; $c = 3 \cdot 10^8$ m s⁻¹; 1 eV = $1,6 \cdot 10^{-19}$ J.

b) (1.25 puntos) Dos esferas conductoras, de radios $R_1 = 90$ cm y $R_2 = 45$ cm, están cargadas de modo que sus superficies están a un potencial, respecto del infinito, de $V_1 = 10$ V y $V_2 = 20$ V, respectivamente. Las esferas se encuentran en una zona del espacio vacío y con sus centros separados a gran distancia. Calcula la carga que quedará en cada esfera si ambas se unen mediante un conductor de capacidad despreciable.

Datos: $K = 9,0 \cdot 10^9$ N m² C⁻².

c) (1.25 puntos) En el laboratorio del instituto se mide el tiempo que tarda un péndulo simple en describir oscilaciones de pequeña amplitud, con el fin de determinar el valor de la aceleración de la gravedad. Responder a las siguientes cuestiones:

c.1) Si se repite la experiencia con otra bola de masa distinta, ¿se obtendrán los mismos resultados? ¿Por qué?

c.2) ¿Qué longitud debería tener el hilo para que el periodo fuera el doble del obtenido?

c.3) En la luna, donde la gravedad viene a ser 6 veces menor que en la Tierra ¿Cuál sería el periodo de un péndulo, si en la Tierra su periodo es de 2 segundos?

a)

1. Pasar la función de trabajo, W_0 a Julios (J)

$$W_0 = 4,08 \text{ eV} = 6,53 \times 10^{-19} \text{ J}$$

2. Hallar la frecuencia umbral, f_0 , a partir de W_0

$$f_0 = \frac{W_0}{h} = 9,85 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

3. Exponer como hallar la cantidad de energía cinética, E_c que reciben los electrones a partir de la energía incidente, E_i de los fotones. La energía se conserva en el proceso:

$$E_i = W_0 + E_c \rightarrow E_c = E_i - W_0$$

4. A partir de la longitud de onda:

$$E_i = \frac{hc}{\lambda} = 7,96 \times 10^{-19} \text{ J}$$

5. Obtener el valor de la energía cinética de los e⁻ emitidos:

$$E_c = hf - W_0 = 1,43 \times 10^{-19} \text{ J}$$

b) Inicialmente, antes del contacto, podemos calcular la carga de cada esfera mediante la relación:

$$V = K \frac{Q}{R} \Rightarrow Q_1 = \frac{V_1 R_1}{K} = 1 \times 10^{-9} \text{ C} \Rightarrow Q_2 = \frac{V_2 R_2}{K} = 1 \times 10^{-9} \text{ C}$$

Tras el contacto se cumplen dos condiciones:

1. El potencial es igual en ambas esferas.
2. La cantidad total de carga es la misma que antes del contacto.

Traduciendo esto a ecuaciones obtenemos un sistema que nos permite resolver las cargas finales:

$$\frac{Q'_1}{R_1} = \frac{Q'_2}{R_2} \Rightarrow \frac{Q'_1}{0,9} = \frac{Q'_2}{0,45}$$

$$Q_1 + Q_2 = Q'_1 + Q'_2 = 2 \times 10^{-9} \text{ C}$$

$$Q'_1 = 1,33 \times 10^{-9} \text{ C}, \quad Q'_2 = 6,67 \times 10^{-10} \text{ C}$$

c.1) Sí, se obtendrán los mismos resultados. Esto se debe a que para pequeñas oscilaciones el giro es proporcional al peso del objeto, que podemos escribir, relacionando con la segunda Ley de Newton como:

$$F_c = m \frac{v^2}{R} = P = mg$$

$$\frac{v^2}{R} = g$$

Para obtener el periodo tenemos en cuenta que $v = \omega R = 2\pi/T$ y en caso del péndulo $R = L$, siendo la longitud del péndulo:

$$\frac{v^2}{L} = g \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow L = g \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

La expresión del periodo del péndulo simple no depende de la masa, como se puede observar.

c.2) De la relación anterior observamos que al despejar L el periodo se encuentra elevado al cuadrado, luego será necesaria una longitud:

$$L' = g \frac{(2T)^2}{4\pi^2} = 4g \frac{T^2}{4\pi^2} = 4L$$

c.3) Realizando un método semejante al anterior con el caso del periodo obtenemos:

$$T_L = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g_L}} = 2\pi \sqrt{\frac{6L}{g_L}} = \sqrt{6} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{L}{g_L}} = \sqrt{6} T_T \approx 4,9 \text{ s}$$