

Examen Resuelto

Ejercicio 1.

Pregunta 1.1. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y considérense las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Se pide:

- (a) Estudiar si existe algún valor de λ para el cual la matriz AB no tenga inversa.
- (b) Estudiar el rango de la matriz BA en función del parámetro λ .
- (c) Para $\lambda = 1$, discutir el sistema $(A^t A)(x, y, z)^t = (a^2, a^2, 2a)^t$ según los valores de a .

Solución:

(a) Calculamos primero AB (recordando que A es 2×3 y B es 3×2 , luego AB es 2×2):

$$AB = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot 1 + 1 \cdot 0 + \lambda \cdot 1 & \lambda \cdot \lambda + 1 \cdot (-1) + \lambda \cdot (-\lambda) \\ 0 \cdot 1 + \lambda \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 0 \cdot \lambda + \lambda \cdot (-1) + (-1) \cdot (-\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Su determinante es

$$\det(AB) = (2\lambda) \cdot 0 - (-1)(-1) = -1 \neq 0.$$

Por tanto, **AB es invertible para todo $\lambda \in \mathbb{R}$** . No existe ningún valor de λ para el cual AB no tenga inversa.

(b) Ahora calculamos BA (aquí B es 3×2 y A es 2×3 , luego BA es 3×3):

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda^2 + 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ \lambda & 1 - \lambda^2 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Paso 1: ver si puede tener rango 3. Calculamos su determinante expandiendo por la tercera columna:

$$\det(BA) = (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} \lambda & \lambda^2 + 1 \\ \lambda & 1 - \lambda^2 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot (2\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} \lambda & \lambda^2 + 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Los menores son

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & \lambda^2 + 1 \\ \lambda & 1 - \lambda^2 \end{pmatrix} = \lambda(1 - \lambda^2) - \lambda(\lambda^2 + 1) = \lambda(1 - \lambda^2 - \lambda^2 - 1) = -2\lambda^3,$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & \lambda^2 + 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda(-\lambda) - 0 = -\lambda^2.$$

Sustituyendo:

$$\det(BA) = (-1) \cdot (-2\lambda^3) + (2\lambda) \cdot (-\lambda^2) = 2\lambda^3 - 2\lambda^3 = 0.$$

Así, $\det(BA) = 0$ **para todo** λ y por tanto $(BA) \leq 2$.

Paso 2: comprobar que el rango es al menos 2. Basta encontrar un menor 2×2 no nulo. Tomamos, por ejemplo, el menor formado por las filas 1, 2 y columnas 2, 3:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda^2 + 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} = (\lambda^2 + 1) \cdot 1 - 0 \cdot (-\lambda) = \lambda^2 + 1.$$

Como $\lambda^2 + 1 > 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, este menor **nunca** se anula, luego $(BA) \geq 2$.

Concluimos:

$$(BA) = 2 \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(c) Para $\lambda = 1$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

El sistema $(A^t A)(x, y, z)^t = (a^2, a^2, 2a)^t$ queda:

$$\begin{cases} x + y + z = a^2 \\ x + 2y = a^2 \\ x + 2z = 2a \end{cases}$$

Restando la segunda ecuación a la primera:

$$(x + y + z) - (x + 2y) = 0 \implies -y + z = 0 \implies z = y.$$

De la segunda ecuación:

$$x = a^2 - 2y.$$

Sustituimos en la tercera y usando $z = y$:

$$(a^2 - 2y) + 2z = 2a \implies (a^2 - 2y) + 2y = 2a \implies a^2 = 2a \implies a(a - 2) = 0.$$

Por tanto:

$$a = 0 \quad \text{o} \quad a = 2.$$

Discusión:

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 2$, la condición $a^2 = 2a$ no se cumple, luego el sistema es **incompatible (sin solución)**.
- Si $a = 0$, el sistema es **compatible indeterminado**. Con $z = y = t$:

$$x = a^2 - 2y = 0 - 2t = -2t, \quad y = t, \quad z = t,$$

$$(x, y, z) = (-2t, t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Si $a = 2$, el sistema es **compatible indeterminado**. Con $z = y = t$:

$$x = a^2 - 2y = 4 - 2t, \quad y = t, \quad z = t,$$

$$(x, y, z) = (4 - 2t, t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 2.

Pregunta 2.1. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11, & \text{si } x < 2, \\ \sqrt{5x - 1}, & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

- (a) Estudie la continuidad de la función en $\mathbb{R}$.
- (b) Estudie los extremos relativos de la función en el intervalo $(1, 3)$.
- (c) Calcule el área encerrada por la función y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 3$.

Solución:

(a) Continuidad en $\mathbb{R}$. Para $x < 2$, $f(x) = x^2 - 6x + 11$ es un polinomio, luego es continua en $(-\infty, 2)$. Para $x \geq 2$, $f(x) = \sqrt{5x - 1}$ es continua en su dominio; como $x \geq 2 \Rightarrow 5x - 1 \geq 9 > 0$, es continua en $[2, \infty)$.

Solo hay que estudiar el punto de empalme $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 6x + 11) = 4 - 12 + 11 = 3,$$

$$f(2) = \sqrt{5 \cdot 2 - 1} = \sqrt{9} = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{5x - 1} = \sqrt{9} = 3.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$, la función es continua en $x = 2$. Por tanto,

f es continua en $\mathbb{R}$.

(b) Extremos relativos en $(1, 3)$. Estudiamos la derivada por tramos.

Si $x < 2$,

$$f'(x) = 2x - 6.$$

En $(1, 2)$ se cumple $2x - 6 < 0$, luego f es estrictamente decreciente en $(1, 2)$ y no hay puntos críticos en ese intervalo (pues $2x - 6 = 0$ solo en $x = 3$, que no pertenece a $(1, 2)$).

Si $x > 2$,

$$f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x - 1}}.$$

En $(2, 3)$ se cumple $f'(x) > 0$, luego f es estrictamente creciente en $(2, 3)$ y tampoco hay puntos críticos en $(2, 3)$.

El punto $x = 2$ pertenece a $(1, 3)$ y es punto de empalme; además,

en $(1, 2)$ f decrece, y en $(2, 3)$ f crece.

Por cambio de monotonía, $x = 2$ es un **mínimo relativo**. Su valor es

$$f(2) = 3.$$

Concluimos:

En $(1, 3)$ hay un único extremo relativo: mínimo en $x = 2$ con $f(2) = 3$.

No hay máximos relativos en $(1, 3)$.

(c) **Área entre $x = 1$ y $x = 3$.** Primero comprobamos el signo: para $x < 2$,

$$x^2 - 6x + 11 = (x - 3)^2 + 2 > 0,$$

y para $x \geq 2$, $\sqrt{5x - 1} > 0$. Por tanto $f(x) > 0$ en $[1, 3]$ y el área pedida es

$$A = \int_1^3 f(x) dx = \int_1^2 (x^2 - 6x + 11) dx + \int_2^3 \sqrt{5x - 1} dx.$$

Calculamos cada integral:

$$\int (x^2 - 6x + 11) dx = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 11x,$$

$$\int_1^2 (x^2 - 6x + 11) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 11x \right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 12 + 22 \right) - \left(\frac{1}{3} - 3 + 11 \right) = \frac{13}{3}.$$

Para la segunda, si $u = 5x - 1$, entonces $du = 5 dx$ y $dx = \frac{1}{5} du$:

$$\int \sqrt{5x - 1} dx = \int u^{1/2} \frac{1}{5} du = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} = \frac{2}{15} (5x - 1)^{3/2}.$$

Luego

$$\int_2^3 \sqrt{5x - 1} dx = \left[\frac{2}{15} (5x - 1)^{3/2} \right]_2^3 = \frac{2}{15} (14^{3/2} - 9^{3/2}) = \frac{2}{15} (14\sqrt{14} - 27).$$

Sumando:

$$A = \frac{13}{3} + \frac{2}{15} (14\sqrt{14} - 27) = \frac{65}{15} + \frac{28\sqrt{14} - 54}{15} = \frac{11 + 28\sqrt{14}}{15}.$$

Por tanto,

$$A = \frac{11 + 28\sqrt{14}}{15}.$$

Ejercicio 3.

Pregunta 3.1. Sean los puntos $A(0, 0, 0)$ y $B(1, 1, 1)$, y la recta

$$r : (x, y, z) = (\lambda, \lambda, \lambda + 1), \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Halle una ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos.
- Halle una ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto B .
- Halle una ecuación de una recta que sea paralela a r y pase por A .

Solución:

(a) Si un plano π es el plano de simetría que intercambia A y B , entonces:

- π pasa por el punto medio del segmento $\overline{AB}$,

- y es perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$ (que actúa como normal del plano).

Calculamos:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 1, 1), \quad M = \frac{A + B}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Luego una ecuación de π es

$$(1, 1, 1) \cdot ((x, y, z) - M) = 0 \implies (x - \frac{1}{2}) + (y - \frac{1}{2}) + (z - \frac{1}{2}) = 0 \implies x + y + z = \frac{3}{2}.$$

(Equivalente: $2x + 2y + 2z = 3$.)

(b) La recta r puede escribirse como punto + dirección:

$$r : (x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda(1, 1, 1),$$

así que un punto de r es $P = (0, 0, 1)$ y un vector director es

$$\vec{v} = (1, 1, 1).$$

El plano buscado debe contener r y además pasar por $B(1, 1, 1)$, por lo que también contiene el vector

$$\vec{w} = \overrightarrow{PB} = B - P = (1, 1, 0).$$

Un vector normal al plano es el producto vectorial

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = (1, 1, 1) \times (1, 1, 0) = (1 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0, 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = (-1, 1, 0).$$

Tomando como normal $\vec{n} = (1, -1, 0)$ y usando el punto B :

$$(1, -1, 0) \cdot ((x, y, z) - (1, 1, 1)) = 0 \implies (x - 1) - (y - 1) = 0 \implies x - y = 0.$$

Es decir, $x = y$. (Se comprueba que r verifica $x = y$ para todo λ y que B cumple $1 = 1$.)

(c) Una recta paralela a r debe tener el mismo vector director $\vec{v} = (1, 1, 1)$ y pasar por $A(0, 0, 0)$:

$$\ell : (x, y, z) = (0, 0, 0) + t(1, 1, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Equivalente: $x = t, y = t, z = t$.

Ejercicio 4.

Pregunta 4. Según los datos de la Comunidad de Madrid, en la temporada 2021–2022 la cobertura de la vacuna de la gripe entre mayores de 65 años fue de un 73,2 %.

- (a) Ante una situación de brote epidémico, las autoridades deciden restringir aquellas reuniones en las que la probabilidad de que haya más de una persona no vacunada sea mayor de 0,5. Suponiendo que los asistentes a una reunión suponen una muestra aleatoria, ¿se deberían restringir las reuniones de 5 personas mayores de 65 años? ¿Y las reuniones de 7 personas mayores de 65 años?

- (b) Se toma una muestra aleatoria de 500 personas mayores de 65 años. Calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos 350 de ellos estén vacunados contra la gripe.

Solución:

Sea $p = 0,732$ la probabilidad de estar vacunado y $q = 1 - p = 0,268$ la de no estarlo.

- (a) Sea X el número de no vacunados en una reunión de n personas. Entonces

$$X \sim \text{Bin}(n, q).$$

Se pide estudiar si

$$\mathbb{P}(X \geq 2) > 0,5.$$

Como

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) = 1 - p^n - nqp^{n-1},$$

calculamos:

- Para $n = 5$:

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - p^5 - 5qp^4 = 1 - 0,21016 - 0,38472 \approx 0,40511 < 0,5.$$

No se deberían restringir las reuniones de 5 personas.

- Para $n = 7$:

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - p^7 - 7qp^6 = 1 - 0,11261 - 0,28860 \approx 0,59879 > 0,5.$$

Sí se deberían restringir las reuniones de 7 personas.

- (b) Sea Y el número de vacunados en una muestra de $n = 500$ personas. Entonces

$$Y \sim \text{Bin}(500, p), \quad p = 0,732.$$

Comprobación de aplicabilidad de la aproximación normal: $np = 366$ y $nq = 134$ (ambos grandes). Aproximamos por una normal

$$Y \approx N(\mu, \sigma^2), \quad \mu = np = 366, \quad \sigma^2 = npq = 500 \cdot 0,732 \cdot 0,268 = 98,088,$$

$$\sigma = \sqrt{98,088} \approx 9,904.$$

Se pide $\mathbb{P}(Y \geq 350)$. Con corrección de continuidad:

$$\mathbb{P}(Y \geq 350) \approx \mathbb{P}(N \geq 349,5) = \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{349,5 - \mu}{\sigma}\right), \quad Z \sim N(0, 1).$$

$$\frac{349,5 - 366}{9,904} \approx -1,666.$$

Luego

$$\mathbb{P}(Y \geq 350) \approx \mathbb{P}(Z \geq -1,666) = \Phi(1,666) \approx 0,952.$$

$\mathbb{P}(Y \geq 350) \approx 0,952.$