

Ejercicio 1.

Ejercicio 1 (2,5 puntos). Responda los tres apartados; este ejercicio no tiene opcionalidad.

HidroBio es una marca de un preparado en polvo para elaborar suero bebible que se utiliza para rehidratar a pacientes con gastroenteritis. El suero se prepara disolviendo un sobre de HidroBio en un litro de agua. La marca comercializa tres tipos de sobres, de sabor a naranja, fresa o limón. El contenido de cada sobre reacciona químicamente con el agua produciéndose en esa reacción un determinado principio activo, en cantidad variable en función del tiempo, de manera que la tasa de variación instantánea de la cantidad de principio activo, medida en mg/hora, viene dada por la función

$$c(t) = \frac{3}{2} \left(t - \frac{t^2}{2} \right),$$

siendo t el tiempo transcurrido, en horas, desde la elaboración del preparado hasta pasadas tres horas. La cantidad de principio activo presente en la disolución potencia además el sabor del preparado, de forma que a más cantidad de principio más intenso es el sabor.

- 1.a) (1 punto) Indique la cantidad de principio activo al cabo de 60 minutos de haber sido preparado el suero.
- 1.b) (0,75 puntos) ¿Va aumentando la cantidad de principio activo a lo largo de las 3 primeras horas? ¿Por qué?
- 1.c) (0,75 puntos) Se ha observado que para conseguir que los menores de 5 años ingieran el suero más fácilmente, lo mejor es disolver un sobre con sabor a fresa y darles el primer vaso en el momento en que el sabor de la disolución sea más intenso. ¿Cuándo le daría el primer vaso de suero a una niña de 4 años? Determine cuál será la cantidad de principio activo en el litro de suero en ese momento.

Solución:

La función $c(t)$ representa la **tasa de variación instantánea** (mg/hora) de la cantidad de principio activo. Por tanto, si $F(t)$ es la **cantidad** (en mg) de principio activo tras t horas, se cumple

$$F'(t) = c(t), \quad 0 \leq t \leq 3.$$

Además, en el instante inicial ($t = 0$) todavía no se ha generado principio activo:

$$F(0) = 0.$$

1.a) Hallamos una primitiva de $c(t)$ y usamos la condición inicial:

$$c(t) = \frac{3}{2} \left(t - \frac{t^2}{2} \right) = \frac{3}{2}t - \frac{3}{4}t^2.$$

$$F(t) = \int \left(\frac{3}{2}t - \frac{3}{4}t^2 \right) dt = \frac{3}{4}t^2 - \frac{1}{4}t^3 + k.$$

Como $F(0) = 0$, se obtiene $k = 0$. Luego

$$F(t) = \frac{3}{4}t^2 - \frac{1}{4}t^3.$$

A los 60 minutos ($t = 1$ hora):

$$F(1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Al cabo de 60 minutos hay 0,5 mg de principio activo.

1.b) La cantidad $F(t)$ aumenta donde $F'(t) > 0$, es decir, donde $c(t) > 0$.

$$c(t) = \frac{3}{2} \left(t - \frac{t^2}{2} \right) = \frac{3}{2} t \left(1 - \frac{t}{2} \right).$$

Sus ceros son $t = 0$ y $t = 2$. El signo:

$$\begin{cases} c(t) > 0, & 0 < t < 2, \\ c(t) < 0, & 2 < t \leq 3. \end{cases}$$

Por tanto,

F crece en $(0, 2)$ y decrece en $(2, 3)$.

Luego **no** va aumentando durante las 3 primeras horas: **solo aumenta durante las dos primeras horas** (porque $c(t) = F'(t) > 0$ en $(0, 2)$ y cambia a negativo a partir de $t = 2$).

1.c) El sabor es más intenso cuando la cantidad de principio activo es máxima, es decir, cuando $F(t)$ alcanza su máximo en $[0, 3]$.

Del apartado anterior, F **crece** hasta $t = 2$ y **decrece** después, por lo que el máximo se alcanza en

$$t = 2 \text{ horas.}$$

La cantidad de principio activo en ese instante es

$$F(2) = \frac{3}{4} \cdot 2^2 - \frac{1}{4} \cdot 2^3 = \frac{3}{4} \cdot 4 - \frac{1}{4} \cdot 8 = 3 - 2 = 1.$$

Le daría el primer vaso a las 2 horas y habrá 1 mg en el litro de suero.

Ejercicio 2.

Pregunta 2.1. Se consideran las matrices A y B dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -100 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2.1.a) (1,25 puntos) Calcule la matriz D tal que $B(D^t + A^{-1})B^{-1} = 2I$, donde I es la matriz identidad de tamaño 2×2 .

(2.1.b) (1,25 puntos) La matriz A verifica la igualdad $A^2 = A + 2I$. Calcule A^4 .

Solución:

(2.1.a) Partimos de

$$B(D^t + A^{-1})B^{-1} = 2I.$$

Multiplicando a la izquierda por B^{-1} y a la derecha por B :

$$D^t + A^{-1} = B^{-1}(2I)B = 2B^{-1}B = 2I,$$

y por tanto

$$D^t = 2I - A^{-1}.$$

Calculamos A^{-1} . Como A es triangular superior,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det(A) = 2 \cdot (-1) - 0 = -2 \neq 0,$$

luego es invertible y

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$D^t = 2I - A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Transponiendo:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

(2.1.b) Dado que $A^2 = A + 2I$, se tiene

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (A + 2I)(A + 2I) = A^2 + 4A + 4I.$$

Sustituyendo $A^2 = A + 2I$:

$$A^4 = (A + 2I) + 4A + 4I = 5A + 6I.$$

Luego

$$A^4 = 5 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 15 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.

Pregunta 3.1. En el primer municipio, la proporción de personas comprometidas con el reciclaje es $p = 0,7$. Se toma una muestra aleatoria simple de 600 personas de dicho municipio:

- 3.1.a) (1 punto) Determine el número esperado de personas en la muestra elegida que no estarán comprometidas con prácticas de reciclaje.
- 3.1.b) (1,5 puntos) Mediante la aproximación por una normal, calcule la probabilidad de que el número de personas comprometidas con el reciclaje esté entre 408 y 432, ambos inclusive.

Solución:

Sea X el número de personas comprometidas con el reciclaje en la muestra. Entonces

$$X \sim \text{Bin}(n = 600, p = 0,7), \quad q = 1 - p = 0,3.$$

3.1.a) El número de no comprometidas es $600 - X$, y su esperanza vale

$$\mathbb{E}(600 - X) = 600 - \mathbb{E}(X) = 600 - 600p = 600(1 - p) = 600 \cdot 0,3 = 180.$$

El número esperado de no comprometidas es 180.

3.1.b) Se pide $\mathbb{P}(408 \leq X \leq 432)$. Como $np = 600 \cdot 0,7 = 420$ y $nq = 600 \cdot 0,3 = 180$ son grandes, aproximamos por una normal:

$$X \approx N(\mu, \sigma^2), \quad \mu = np = 420, \quad \sigma^2 = npq = 600 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 126,$$

$$\sigma = \sqrt{126} \approx 11,225.$$

Con **corrección por continuidad** (intervalo inclusivo):

$$\mathbb{P}(408 \leq X \leq 432) \approx \mathbb{P}(407,5 \leq N \leq 432,5).$$

Tipificando con $Z \sim N(0, 1)$:

$$\mathbb{P}(407,5 \leq N \leq 432,5) = \mathbb{P}\left(\frac{407,5 - 420}{\sigma} \leq Z \leq \frac{432,5 - 420}{\sigma}\right).$$

Como

$$\frac{432,5 - 420}{11,225} = \frac{12,5}{11,225} \approx 1,114, \quad \frac{407,5 - 420}{11,225} \approx -1,114,$$

queda

$$\mathbb{P}(408 \leq X \leq 432) \approx \Phi(1,114) - \Phi(-1,114) = 2\Phi(1,114) - 1.$$

Usando la tabla normal (por ejemplo, interpolando entre 1,11 y 1,12):

$$\Phi(1,114) \approx 0,8673 \implies \mathbb{P}(408 \leq X \leq 432) \approx 2 \cdot 0,8673 - 1 \approx 0,7346.$$

$\mathbb{P}(408 \leq X \leq 432) \approx 0,735.$

Ejercicio 4.

Pregunta 4.1. De dos sucesos A y B sabemos que:

$$P(A \cup B) = 1, \quad P(B) = 0,8, \quad P(\bar{A}) = 0,55,$$

donde $\bar{A}$ es el suceso complementario de A .

4.1.a) (1 punto) Calcule $P(A|B)$.

4.1.b) (1 punto) Calcule $P(\bar{B}|A)$ siendo $\bar{B}$ el suceso complementario de B .

4.1.c) (0,5 puntos) Calcule $P(\bar{A} \cap B)$.

Solución:

A partir de $P(\overline{A}) = 0,55$ se tiene

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,55 = 0,45.$$

Además, usando la fórmula de la unión:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Como $P(A \cup B) = 1$, resulta

$$1 = 0,45 + 0,8 - P(A \cap B) \implies P(A \cap B) = 0,25.$$

4.1.a) Por definición de probabilidad condicionada:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,25}{0,8} = 0,3125 = \frac{5}{16}.$$

$$\boxed{P(A|B) = 0,3125.}$$

4.1.b) Se tiene

$$P(\overline{B}|A) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)}.$$

Y

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,45 - 0,25 = 0,20.$$

Por tanto,

$$P(\overline{B}|A) = \frac{0,20}{0,45} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9} \approx 0,4444.$$

$$\boxed{P(\overline{B}|A) = \frac{4}{9} \approx 0,4444.}$$

4.1.c) Como $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$ (unión disjunta),

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,8 - 0,25 = 0,55.$$

$$\boxed{P(\overline{A} \cap B) = 0,55.}$$