

## MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

### 1. Números e Álgebra:

Despexe a matriz  $X$  da ecuación  $XA = A + XB$ , se  $A$  e  $B$  son matrices cadradas tales que  $A - B$  é invertible. Logo, calcule  $X$  se  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  e  $B = (A^2 - A - I)^{-1}$ , onde  $I$  é a matriz identidade de orde 2.

### 2. Números e Álgebra:

Discuta, segundo os valores de  $m$ , o sistema

$$\begin{cases} mx + (2 + m^2)y & = 1 + m, \\ my - z & = 1, \\ mx + 2y + (2m - 4)z & = 5. \end{cases}$$

### 3. Análise:

a) Se  $f(x) = ae^x + b$ , diga que valores deben ter  $a$  e  $b$  para que se cumpran  $f(0) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$ .

b) Estude se a función  $f(x) = x + \sin x$  ten extremos ou puntos de inflexión no intervalo  $(0, 2\pi)$ , diga onde están en caso de que existan e esboce a gráfica de  $f$  nese intervalo.

### 4. Análise:

Calcule a área da rexión determinada polas desigualdades  $x \geq 1$ ,  $y \leq x$  e  $y \geq f(x)$ , con  $f(x) = x \ln x$ . Faga un esbozo gráfico da rexión. **Nota:**  $\ln x$  é o logaritmo neperiano de  $x$ .

### 5. Xeometría:

a) Obteña as ecuacións paramétricas da recta  $r$  que pasa polos puntos  $P(2, -1, 0)$  e  $Q(3, 0, 0)$  e a ecuación implícita ou xeral do plano  $\pi$  que pasa polo punto  $R(0, 4, -2)$  e é paralelo aos vectores  $\vec{u}(1, 0, -1)$  e  $\vec{v}(2, 1, -2)$ .

b) Calcule o ángulo agudo que forma a recta  $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$  co plano  $\pi: x + z + 2 = 0$ .

### 6. Xeometría:

a) Calcule o punto simétrico de  $P(2, -1, 0)$  con respecto ao plano  $\pi: x + z + 2 = 0$ .

b) Estude a posición relativa das rectas  $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$  e  $s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$ . Se se cortan, calcule o punto de corte.

### 7. Estatística e Probabilidade:

a) Calcule as catro probabilidades  $P(A)$ ,  $P(A \cap \bar{B})$ ,  $P(A|B)$  e  $P(B|A)$  sabendo que  $P(A \cup B) = 0.8$ ,  $P(A \cap B) = 0.2$  e  $P(A) = 2P(B)$ . **Nota:**  $\bar{B}$  é o suceso contrario ou complementario de  $B$ .

b) Nun coñecido congreso, o 60% dos científicos inscritos participan *online* e o resto asisten en persoa. Ademais, o 65% dos inscritos son europeos e o 80% dos que asisten en persoa tamén o son. Se se elixe ao azar a un dos inscritos, calcule a probabilidade de que sexa europeo e, á vez, participe *online*; logo, a de que participe *online* se se sabe que é europeo.

### 8. Estatística e Probabilidade:

a) Nunha certa zona húmida, a probabilidade de que un cabezolo chegue a ra adulta é do 2%. Se se escollen ao azar 2500 deses cabezolos, cal é a probabilidade de que polo menos 55 deles cheguen a ras adultas?

b) Para conceder bolsas de estudo, un organismo valora os méritos presentados e asigna a cada candidato unha puntuación que indica máis méritos canto maior é o seu valor. Este ano, a puntuación segue unha distribución normal de media 100 e desviación típica 20, e tómase a decisión de conceder a bolsa ao 5% mellor do conxunto de solicitantes. Que puntuación é preciso alcanzar para obter a bolsa?

## MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**.

### 1. Números y Álgebra:

Despeje la matriz  $X$  de la ecuación  $XA = A + XB$ , si  $A$  y  $B$  son matrices cuadradas tales que  $A - B$  es invertible. Luego, calcule  $X$  si  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  y  $B = (A^2 - A - I)^{-1}$ , donde  $I$  es la matriz identidad de orden 2.

### 2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores de  $m$ , el sistema

$$\begin{cases} mx + (2 + m^2)y & = 1 + m, \\ my - z & = 1, \\ mx + 2y + (2m - 4)z & = 5. \end{cases}$$

### 3. Análisis:

- a) Si  $f(x) = ae^x + b$ , diga qué valores deben tener  $a$  y  $b$  para que se cumplan  $f(0) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$ .
- b) Estudie si la función  $f(x) = x + \sin x$  tiene extremos o puntos de inflexión en el intervalo  $(0, 2\pi)$ , diga dónde están en caso de que existan y esboce la gráfica de  $f$  en ese intervalo.

### 4. Análisis:

Calcule el área de la región determinada por las desigualdades  $x \geq 1$ ,  $y \leq x$  e  $y \geq f(x)$ , con  $f(x) = x \ln x$ . Haga un esbozo gráfico de la región. **Nota:**  $\ln x$  es el logaritmo neperiano de  $x$ .

### 5. Geometría:

- a) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta  $r$  que pasa por los puntos  $P(2, -1, 0)$  y  $Q(3, 0, 0)$  y la ecuación implícita o general del plano  $\pi$  que pasa por el punto  $R(0, 4, -2)$  y es paralelo a los vectores  $\vec{u}(1, 0, -1)$  y  $\vec{v}(2, 1, -2)$ .
- b) Calcule el ángulo agudo que forma la recta  $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$  con el plano  $\pi: x + z + 2 = 0$ .

### 6. Geometría:

- a) Calcule el punto simétrico de  $P(2, -1, 0)$  con respecto al plano  $\pi: x + z + 2 = 0$ .
- b) Estudie la posición relativa de las rectas  $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$  y  $s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$ . Si se cortan, calcule el punto de corte.

### 7. Estadística y Probabilidad:

- a) Calcule las cuatro probabilidades  $P(A)$ ,  $P(A \cap \bar{B})$ ,  $P(A|B)$  y  $P(B|A)$  sabiendo que  $P(A \cup B) = 0.8$ ,  $P(A \cap B) = 0.2$  y  $P(A) = 2P(B)$ . **Nota:**  $\bar{B}$  es el suceso contrario o complementario de  $B$ .
- b) En un conocido congreso, el 60% de los científicos inscritos participan *online* y el resto asisten en persona. Además, el 65% de los inscritos son europeos y el 80% de los que asisten en persona también lo son. Si se elige al azar a uno de los inscritos, calcule la probabilidad de que sea europeo y, a la vez, participe *online*; luego, la de que participe *online* si se sabe que es europeo.

### 8. Estadística y Probabilidad:

- a) En un cierto humedal, la probabilidad de que un renacuajo llegue a rana adulta es del 2%. Si se escogen al azar 2500 de esos renacuajos, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 55 de ellos lleguen a ranas adultas?
- b) Para conceder becas de estudio, un organismo valora los méritos presentados y asigna a cada candidato una puntuación que indica más méritos cuanto mayor es su valor. Este año, la puntuación sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20, y se toma la decisión de conceder la beca al 5% mejor del conjunto de solicitantes. ¿Qué puntuación es preciso alcanzar para obtener la beca?

## MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

### 1. Números e Álgebra:

a) Calcule  $A$  se  $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

b) Se  $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$  é invertible, obteña os valores de  $x$ ,  $y$  e  $z$  sabendo que  $\det(A - 3I) = 0$ , que  $y \neq 0$  e que  $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ . Enténdase que  $I$  é a matriz identidade.

### 2. Números e Álgebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro  $m$ , o sistema 
$$\begin{cases} (m+1)x & + & z & = & 1, \\ (m+1)x & + & y & + & z & = & m+1, \\ (m+1)x & + & my & + & (m-1)z & = & m. \end{cases}$$

### 3. Análise:

a) Enuncie os teoremas de Rolle e do valor medio do cálculo diferencial.

b) Explique se  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  está ou non nas hipóteses do teorema do valor medio do cálculo diferencial. En caso de que o estea, calcule un valor  $c$  para o cal se cumpra a tese dese teorema.

### 4. Análise:

a) Calcule mediante cambio de variable as integrais  $\int (\sin x)^5 \cos x \, dx$  e  $\int (\ln x)/x \, dx$ .

b) Calcule  $\int (\ln x)/x \, dx$  empregando o método de integración por partes. Logo, obteña algún valor de  $B$  tal que  $\int_e^B (\ln x)/x \, dx = 3/2$ .

### 5. Xeometría:

a) Considérense o plano  $\pi: ax + y + z = 1$ , onde  $a$  é un parámetro real e a recta  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$ . Estude a posición relativa de  $\pi$  e  $r$  en función de  $a$  e obteña o valor de  $a$  que fai que  $\pi$  e  $r$  sexan perpendiculares. Por último, razoe se  $r$  pode estar contida en  $\pi$  ou non.

b) Se  $\pi: -3x + y + z = 1$ , diga que valor ten que tomar  $b$  para que  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$  estea contida en  $\pi$ .

### 6. Xeometría:

Considérese o plano  $\pi: 2x - y + z = 1$ . Pídesese:

a) Calcular a distancia de  $\pi$  ao punto de corte das rectas  $r_1: \begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = 0, \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$  e  $r_2: \begin{cases} x = \mu, \\ y = -1 + \mu, \\ z = 0, \end{cases}$  ( $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ).

b) Obter o punto simétrico de  $P(1,0,0)$  con respecto a  $\pi$ .

### 7. Estatística e Probabilidade:

a) Calcule  $P(A|B)$  se  $B \subset A$ . Logo, se  $P(C) = 0.5$  e  $P(D) = 0.6$ , explique se  $C$  e  $D$  poden ser incompatibles. Por último, obteña  $P(E \cup F)$  e  $P(E \cap \bar{F})$  se  $E$  e  $F$  son independentes,  $P(E) = 0.3$  e  $P(F) = 0.2$ .

b) Tírase un dado sete veces. Calcule a probabilidade de que saian exactamente dous seis.

### 8. Estatística e Probabilidade:

Para un determinado grupo de pacientes, a tensión arterial sistólica (medida en mmHg) segue una distribución normal de media 123.6 e desviación típica 17.8. Calcule a probabilidade de que un paciente elixido ao azar teña unha tensión comprendida entre 100 e 120 mmHg. Logo, obteña o valor da tensión que é superado polo 67% dos pacientes.

## MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**.

### 1. Números y Álgebra:

a) Calcule  $A$  si  $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

b) Si  $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$  es invertible, obtenga los valores de  $x$ ,  $y$  y  $z$  sabiendo que  $\det(A - 3I) = 0$ , que  $y \neq 0$  y que  $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ . Entiéndase que  $I$  es la matriz identidad.

### 2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro  $m$ , el sistema 
$$\begin{cases} (m+1)x & + & z & = & 1, \\ (m+1)x & + & y & + & z & = & m+1, \\ (m+1)x & + & my & + & (m-1)z & = & m. \end{cases}$$

### 3. Análisis:

a) Enuncie los teoremas de Rolle y del valor medio del cálculo diferencial.

b) Explique si  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ , está o no en las hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial. En caso de que lo esté, calcule un valor  $c$  para el cual se cumpla la tesis de ese teorema.

### 4. Análisis:

a) Calcule mediante cambio de variable las integrales  $\int (\sin x)^5 \cos x \, dx$  y  $\int (\ln x)/x \, dx$ .

b) Calcule  $\int (\ln x)/x \, dx$  empleando el método de integración por partes. Luego, obtenga algún valor de  $B$  tal que  $\int_e^B (\ln x)/x \, dx = 3/2$ .

### 5. Geometría:

a) Considérense el plano  $\pi: ax + y + z = 1$ , donde  $a$  es un parámetro real, y la recta  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$ . Estudie la posición relativa de  $\pi$  y  $r$  en función de  $a$  y obtenga el valor de  $a$  que hace que  $\pi$  y  $r$  sean perpendiculares. Por último, razone si  $r$  puede estar contenida en  $\pi$  o no.

b) Si  $\pi: -3x + y + z = 1$ , diga qué valor tiene que tomar  $b$  para que  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$  esté contenida en  $\pi$ .

### 6. Geometría:

Considérense el plano  $\pi: 2x - y + z = 1$ . Se pide:

a) Calcular la distancia de  $\pi$  al punto de corte de las rectas  $r_1: \begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = 0, \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$  y  $r_2: \begin{cases} x = \mu, \\ y = -1 + \mu, \\ z = 0, \end{cases}$  ( $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ).

b) Obtener el punto simétrico de  $P(1,0,0)$  con respecto a  $\pi$ .

### 7. Estadística y Probabilidad:

a) Calcule  $P(A|B)$  si  $B \subset A$ . Luego, si  $P(C) = 0.5$  y  $P(D) = 0.6$ , explique si  $C$  y  $D$  pueden ser incompatibles. Por último, obtenga  $P(E \cup F)$  y  $P(E \cap \bar{F})$  si  $E$  y  $F$  son independientes,  $P(E) = 0.3$  y  $P(F) = 0.2$ .

b) Se tira un dado siete veces. Calcule la probabilidad de que salgan exactamente dos seises.

### 8. Estadística y Probabilidad:

Para un determinado grupo de pacientes, la tensión arterial sistólica (medida en mmHg) sigue una distribución normal de media 123.6 y desviación típica 17.8. Calcule la probabilidad de que un paciente elegido al azar tenga una tensión comprendida entre 100 y 120 mmHg. Luego, obtenga el valor de la tensión que es superado por el 67% de los pacientes.

ABAU 2023  
CONVOCATORIA ORDINARIA  
CRITERIOS DE AVALIACIÓN  
**MATEMÁTICAS II**  
(Cód. 20)

Só puntúan cinco das oito preguntas.

As puntuacións parciais que seguen están ligadas a un determinado xeito de resolver os exercicios, pero, nalgúns casos, pode haber outras formas correctas de solucionarlos.

**1. Números e Álgebra** (2 puntos)

**0.75** por despegar  $X$ , **0.5** por chegar a  $B = -I$ , **0.5** por calcular  $(A - B)^{-1}$ , **0.25** por concluír.

**2. Números e Álgebra** (2 puntos)

**0.5** por resolver  $\det A = 0$ , **0.5** polo estudo de cada un dos tres casos.

Se se fai por Gauss, **1.25** por chegar ao sistema triangular equivalente, **0.25** por cada un dos tres casos.

**3. Análise** (2 puntos)

a) **1** punto:

**0.25** por ver que  $b = -a$ , **0.75** por chegar a  $a = 3$ .

b) **1** punto:

**0.5** por comprobar que non hai extremos e que hai un punto de inflexión en  $x = \pi$ , **0.5** por esbozar a gráfica.

**4. Análise** (2 puntos)

**0.5** pola formulación, **0.5** polo cálculo da primitiva, **0.5** polo resultado, **0.5** polo debuxo da rexión.

**5. Xeometría** (2 puntos)

a) **1** punto: **0.5** polas ecuacións da recta, **0.5** pola ecuación do plano.

b) **1** punto.

**6. Xeometría (2 puntos)**

a) **1** punto: **0.25** pola recta perpendicular, **0.25** polo punto de corte, **0.5** polo cálculo do punto simétrico.

b) **1** punto: **0.5** pola posición relativa, **0.5** polo punto de corte.

**7. Estatística e Probabilidade (2 puntos)**

a) **1** punto: **0.25** por cada unha das catro probabilidades que se piden.

b) **1** punto: **0.5** por cada unha das dúas probabilidades que se piden.

**8. Estatística e Probabilidade (2 puntos)**

a) **1** punto:

**0.5** por chegar a  $P(X \geq 55) \approx P(\tilde{X} \geq 54.5)$ , con  $\tilde{X} \rightarrow N(50,7)$ ,

**0.25** por chegar a  $P(Z \geq 0.64)$ ,

**0.25** polo resultado.

b) **1** punto:

**0.25** pola formulación,

**0.25** por chegar a  $P\left(Z < \frac{x-100}{20}\right) = 0.95$ ,

**0.5** pola obtención de  $x$ .



**Las mates se dominan con práctica. Exámenes resueltos paso a paso.**

selectividad.academy - 623 769 002

ABAU 2023  
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA  
CRITERIOS DE AVALIACIÓN  
**MATEMÁTICAS II**  
(Cód. 20)

Só puntúan cinco das oito preguntas.

**1. Números e Álgebra** (2 puntos)

a) **0.75** puntos: **0.25** por despegar  $A$ , **0.25** por calcular  $B^{-1}$ , **0.25** por calcular  $A$ .

Se se pensa en  $A$  como unha matriz incógnita  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ : **0.5** por chegar ao sistema, **0.25** pola solución.

b) **1.25** puntos: **0.25** polo cálculo de  $\det(A - 3I)$ , **0.25** por deducir que  $x = 0$ , **0.25** por calcular  $A^{-1}$ , **0.25** por chegar a  $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} z+1 & 0 \\ -y & 4 \end{pmatrix}$ , **0.25** pola conclusión.

**2. Números e Álgebra** (2 puntos)

**0.5** por resolver  $\det A = 0$ , **0.5** por cada un dos tres casos.

Se se fai por Gauss, **1.25** por chegar ao sistema triangular equivalente, **0.25** por cada un dos tres casos.

**3. Análise** (2 puntos)

a) **1** punto: **0.5** polo teorema de Rolle e **0.5** polo teorema do valor medio.

b) **1** punto: **0.5** por dicir que a función é continua no cerrado e derivable no aberto e **0.5** por obter o valor de  $c$ .

**4. Análise** (2 puntos)

a) **1** punto: **0.5** por cada unha das dúas integrais, feitas mediante cambio de variable.

b) **1** punto: **0.5** pola primeira parte (integración por partes); **0.5** pola segunda parte, co seguinte reparto: **0.25** por chegar a  $\int_e^B (\ln x)/x \, dx = (1/2)(\ln B)^2 - 1/2$ , **0.25** polo cálculo de  $B$ .



**Guía completa en [selectividad.academy/guia-selectividad](https://selectividad.academy/guia-selectividad)**

Todo sobre la selectividad

**5. Xeometría (2 puntos)**

- a) **1.5 puntos: 0.5** pola posición relativa, **0.5** polo valor de  $a$  que fai que  $r \perp \pi$ , **0.5** por razoar que  $r$  non pode estar contida en  $\pi$ .
- b) **0.5 puntos.**

**6. Xeometría (2 puntos)**

- a) **1 punto: 0.5** polo punto de corte, **0.5** polo cálculo da distancia.
- b) **1 punto: 0.25** polas ecuacións da recta  $r$  perpendicular a  $\pi$  que pasa por  $P$ , **0.25** pola obtención de  $Q = r \cap \pi$ , **0.5** por determinar o punto simétrico.

**7. Estatística e Probabilidade (2 puntos)**

- a) **1 punto: 0.25** por obter  $P(A|B)$ , **0.25** por razoar que  $C$  e  $D$  non poden ser incompatibles, **0.25** por calcular  $P(E \cup F)$  e **0.25** por calcular  $P(E \cap \bar{F})$ .
- b) **1 punto: 0.25** pola definición da variable e por dicir que é binomial, **0.25** pola fórmula da binomial, **0.5** polo resultado.

**8. Estatística e Probabilidade (2 puntos)**

**1 punto** pola primeira parte, repartido do seguinte xeito: **0.25** por tipificar, **0.25** por chegar a  $P(-1.33 \leq Z \leq -0.20)$ , **0.25** por chegar a  $P(Z \leq 1.33) - P(Z \leq 0.20)$ , **0.25** polo cálculo da probabilidade pedida.

**1 punto** pola segunda parte, repartido do seguinte xeito: **0.25** pola formulación do problema, **0.5** por chegar a  $P\left(Z < \frac{123.6-t}{17.8}\right) = 0.67$ , **0.25** pola obtención de  $t$ .

● Cada examen practicado te acerca a tu objetivo

Prueba gratis

## MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

### 1. Números e Álgebra:

Despeixe a matriz  $X$  da ecuación  $XA = A + XB$ , se  $A$  e  $B$  son matrices cadradas tales que  $A - B$  é invertible. Logo, calcule  $X$  se  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  e  $B = (A^2 - A - I)^{-1}$ , onde  $I$  é a matriz identidade de orde 2.

### 2. Números e Álgebra:

Discuta, segundo os valores de  $m$ , o sistema 
$$\begin{cases} mx + (2 + m^2)y & = & 1 + m, \\ my - z & = & 1, \\ mx + 2y + (2m - 4)z & = & 5. \end{cases}$$

### 3. Análise:

- a) Se  $f(x) = ae^x + b$ , diga que valores deben ter  $a$  e  $b$  para que se cumpran  $f(0) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$ .
- b) Estude se a función  $f(x) = x + \sin x$  ten extremos ou puntos de inflexión no intervalo  $(0, 2\pi)$ , diga onde están en caso de que existan e esboce a gráfica de  $f$  nese intervalo.

### 4. Análise:

Calcule a área da rexión determinada polas desigualdades  $x \geq 1$ ,  $y \leq x$  e  $y \geq f(x)$ , con  $f(x) = x \ln x$ . Faga un esbozo gráfico da rexión. **Nota:**  $\ln x$  é o logaritmo neperiano de  $x$ .

### 5. Xeometría:

- a) Obteña as ecuacións paramétricas da recta  $r$  que pasa polos puntos  $P(2, -1, 0)$  e  $Q(3, 0, 0)$  e a ecuación implícita ou xeral do plano  $\pi$  que pasa polo punto  $R(0, 4, -2)$  e é paralelo aos vectores  $\vec{u}(1, 0, -1)$  e  $\vec{v}(2, 1, -2)$ .
- b) Calcule o ángulo agudo que forma a recta  $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$  co plano  $\pi: x + z + 2 = 0$ .

### 6. Xeometría:

- a) Calcule o punto simétrico de  $P(2, -1, 0)$  con respecto ao plano  $\pi: x + z + 2 = 0$ .
- b) Estude a posición relativa das rectas  $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$  e  $s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$ . Se se cortan, calcule o punto de corte.

### 7. Estatística e Probabilidade:

- a) Calcule as catro probabilidades  $P(A)$ ,  $P(A \cap \bar{B})$ ,  $P(A|B)$  e  $P(B|A)$  sabendo que  $P(A \cup B) = 0.8$ ,  $P(A \cap B) = 0.2$  e  $P(A) = 2P(B)$ . **Nota:**  $\bar{B}$  é o suceso contrario ou complementario de  $B$ .
- b) Nun coñecido congreso, o 60% dos científicos inscritos participan *online* e o resto asisten en persoa. Ademais, o 65% dos inscritos son europeos e o 80% dos que asisten en persoa tamén o son. Se se elixe ao azar a un dos inscritos, calcule a probabilidade de que sexa europeo e, á vez, participe *online*; logo, a de que participe *online* se se sabe que é europeo.

### 8. Estatística e Probabilidade:

- a) Nunha certa zona húmida, a probabilidade de que un cabezolo chegue a ra adulta é do 2%. Se se escollen ao azar 2500 deses cabezolos, cal é a probabilidade de que ao menos 55 deles cheguen a ras adultas?
- b) Para conceder bolsas de estudo, un organismo valora os méritos presentados e asigna a cada candidato unha puntuación que indica máis méritos canto maior é o seu valor. Este ano, a puntuación segue unha distribución normal de media 100 e desviación típica 20, e se toma a decisión de conceder a bolsa ao 5% mellor do conxunto de solicitantes. Que puntuación é preciso alcanzar para obter a bolsa?

## MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**.

### 1. Números y Álgebra:

Despeje la matriz  $X$  de la ecuación  $XA = A + XB$ , si  $A$  y  $B$  son matrices cuadradas tales que  $A - B$  es invertible. Luego, calcule  $X$  si  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  y  $B = (A^2 - A - I)^{-1}$ , donde  $I$  es la matriz identidad de orden 2.

### 2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores de  $m$ , el sistema

$$\begin{cases} mx + (2 + m^2)y & = 1 + m, \\ my - z & = 1, \\ mx + 2y + (2m - 4)z & = 5. \end{cases}$$

### 3. Análisis:

- a) Si  $f(x) = ae^x + b$ , diga qué valores deben tener  $a$  y  $b$  para que se cumplan  $f(0) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$ .
- b) Estudie si la función  $f(x) = x + \sin x$  tiene extremos o puntos de inflexión en el intervalo  $(0, 2\pi)$ , diga dónde están en caso de que existan y esboce la gráfica de  $f$  en ese intervalo.

### 4. Análisis:

Calcule el área de la región determinada por las desigualdades  $x \geq 1$ ,  $y \leq x$  e  $y \geq f(x)$ , con  $f(x) = x \ln x$ . Haga un esbozo gráfico de la región. **Nota:**  $\ln x$  es el logaritmo neperiano de  $x$ .

### 5. Geometría:

- a) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta  $r$  que pasa por los puntos  $P(2, -1, 0)$  y  $Q(3, 0, 0)$  y la ecuación implícita o general del plano  $\pi$  que pasa por el punto  $R(0, 4, -2)$  y es paralelo a los vectores  $\vec{u}(1, 0, -1)$  y  $\vec{v}(2, 1, -2)$ .
- b) Calcule el ángulo agudo que forma la recta  $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$  con el plano  $\pi: x + z + 2 = 0$ .

### 6. Geometría:

- a) Calcule el punto simétrico de  $P(2, -1, 0)$  con respecto al plano  $\pi: x + z + 2 = 0$ .
- b) Estudie la posición relativa de las rectas  $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$  y  $s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$ . Si se cortan, calcule el punto de corte.

### 7. Estadística y Probabilidad:

- a) Calcule las cuatro probabilidades  $P(A)$ ,  $P(A \cap \bar{B})$ ,  $P(A|B)$  y  $P(B|A)$  sabiendo que  $P(A \cup B) = 0.8$ ,  $P(A \cap B) = 0.2$  y  $P(A) = 2P(B)$ . **Nota:**  $\bar{B}$  es el suceso contrario o complementario de  $B$ .
- b) En un conocido congreso, el 60% de los científicos inscritos participan *online* y el resto asisten en persona. Además, el 65% de los inscritos son europeos y el 80% de los que asisten en persona también lo son. Si se elige al azar a uno de los inscritos, calcule la probabilidad de que sea europeo y, a la vez, participe *online*; luego, la de que participe *online* si se sabe que es europeo.

### 8. Estadística y Probabilidad:

- a) En un cierto humedal, la probabilidad de que un renacuajo llegue a rana adulta es del 2%. Si se escogen al azar 2500 de esos renacuajos, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 55 de ellos lleguen a ranas adultas?
- b) Para conceder becas de estudio, un organismo valora los méritos presentados y asigna a cada candidato una puntuación que indica más méritos cuanto mayor es su valor. Este año, la puntuación sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20, y se toma la decisión de conceder la beca al 5% mejor del conjunto de solicitantes. ¿Qué puntuación es preciso alcanzar para obtener la beca?

## MATEMÁTICAS II

1.

Primeira parte:

$$XA = A + XB \Leftrightarrow XA - XB = A \Leftrightarrow X(A - B) = A \Leftrightarrow X = A(A - B)^{-1}.$$

Segunda parte:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A,$$

$$B = (A^2 - A - I)^{-1} = (-I)^{-1} = -I,$$

$$A - B = A + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como  $\det(A - B) = 2$ ,

$$(A - B)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$X = A(A - B)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



**¿Necesitas que te expliquen este ejercicio? Escríbenos**  
 623 769 002

## MATEMÁTICAS II

2.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} m & 2+m^2 & 0 & 1+m \\ 0 & m & -1 & 1 \\ m & 2 & 2m-4 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left( \begin{array}{ccc|c} m & 2+m^2 & 0 & 1+m \\ 0 & m & -1 & 1 \\ 0 & -m^2 & 2m-4 & 4-m \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 + mF_2} \left( \begin{array}{ccc|c} m & 2+m^2 & 0 & 1+m \\ 0 & m & -1 & 1 \\ 0 & 0 & m-4 & 4 \end{array} \right)$$

Sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} mx + (2+m^2)y & = 1+m, \\ my - z & = 1, \\ (m-4)z & = 4. \end{cases}$$

Discusión:

- Se  $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$ , entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é

$$z = \frac{4}{m-4}, \quad y = \frac{1+z}{m}, \quad x = \frac{1+m - (2+m^2)y}{m}.$$

- Se  $m = 0$ , temos

$$\begin{cases} 2y & = 1, \\ -z & = 1, \\ -4z & = 4, \end{cases}$$

e, polo tanto, o sistema é compatible indeterminado, xa que ten as seguintes infinitas solucións:

$$\left[ x = \lambda, \quad y = \frac{1}{2}, \quad z = -1 \right], \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Se  $m = 4$ , o sistema é incompatible, porque a terceira ecuación queda  $0 = 4$ .



**Tu esfuerzo tiene recompensa. Estamos contigo.**

selectividad.academy

## MATEMÁTICAS II

### SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 + m^2 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ m & 2 & 2m - 4 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} m & 2 + m^2 & 0 & 1 + m \\ 0 & m & -1 & 1 \\ m & 2 & 2m - 4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3 \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Como  $\begin{vmatrix} 2 + m^2 & 0 \\ m & -1 \end{vmatrix} = -(2 + m^2) \neq 0$ , é seguro que  $\text{rank } A \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$  e que  $[\text{rank } A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$ .

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} m & 2 + m^2 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ m & 2 & 2m - 4 \end{vmatrix} = m^2(2m - 4) - m(2 + m^2) + 2m \\ &= m\{m(2m - 4) - (2 + m^2) + 2\} = m\{2m^2 - 4m - 2 - m^2 + 2\} = m(m^2 - 4m) \\ &= m^2(m - 4) = 0 \Leftrightarrow m \in \{0, 4\}. \end{aligned}$$

Discusión:

- **Caso  $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$ :**  $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = \text{n.}^\circ$  de incógnitas, polo que **o sistema é compatible determinado**.
- **Caso  $m = 0$ :**  $\text{rank } A = 2$  e  $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ . Ao ser  $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -10 + 2 + 8 = 0$ , tense que  $\text{rank } A^* = 2 = \text{rank } A < 3 = \text{n.}^\circ$  de incógnitas, polo que **o sistema é compatible indeterminado**.
- **Caso  $m = 4$ :**  $\text{rank } A = 2$  e  $A^* = \begin{pmatrix} 4 & 18 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ . Ao ser  $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -20 + 20 - 16 = -16 \neq 0$ , tense que  $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$ , situación na que **o sistema é incompatible**.

## MATEMÁTICAS II

3.

3.a) Se  $f(x) = ae^x + b$ , obteña os valores de  $a$  e  $b$  para que se cumpran  $f(0) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$ :

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow a + b = 0 \Leftrightarrow b = -a.$$

$$f(x) = ae^x - a.$$

Podemos excluír do estudo o caso  $a = 0$  (xa que entón  $f$  é a función nula e  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/x = 0$ ).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x - a}{x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} ae^x = a.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3 \Leftrightarrow a = 3.$$

En definitiva, os valores pedidos son  $a = 3$ ,  $b = -3$ .

selectividad.academy

## MATEMÁTICAS II

**3.b)** Estude se a función  $f(x) = x + \sin x$  ten extremos ou puntos de inflexión no intervalo  $(0, 2\pi)$ , diga onde están en caso de que existan e esboce a gráfica de  $f$  nese intervalo:

$$f(x) = x + \sin x, \quad f'(x) = 1 + \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi.$$

$$f''(\pi) = -\sin \pi = 0, \quad f'''(\pi) = -\cos \pi = -1 \neq 0,$$

polo que **o punto de abscisa  $x = \pi$  é un punto de inflexión de  $f$** . Non hai outros puntos de inflexión, xa que  $f''$  non se anula en ningún outro punto do intervalo  $(0, 2\pi)$ . Non hai extremos, xa que o único punto crítico resultou ser punto de inflexión.

Para a representación gráfica, pensamos na función estendida a  $[0, 2\pi]$ . Tense que:

$$f(0) = 0, \quad f(\pi) = \pi, \quad f(2\pi) = 2\pi,$$

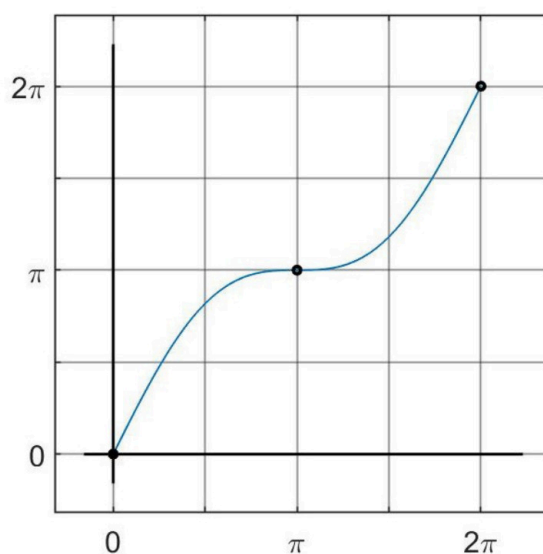
$$f'(x) = 1 + \cos x \geq 0 \quad \forall x \in (0, 2\pi) \quad (f \text{ é non decrecente en } (0, 2\pi)).$$

De feito,  $f$  é crecente en  $(0, 2\pi)$ , xa que  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (0, \pi)$  e  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (\pi, 2\pi)$ ,

$$f''(x) = -\sin x < 0 \quad \forall x \in (0, \pi) \quad (f \text{ é cóncava en } (0, \pi)),$$

$$f''(x) = -\sin x > 0 \quad \forall x \in (\pi, 2\pi) \quad (f \text{ é convexa en } (\pi, 2\pi)).$$

Polo tanto, a gráfica de  $f$  é a que se mostra na seguinte figura:

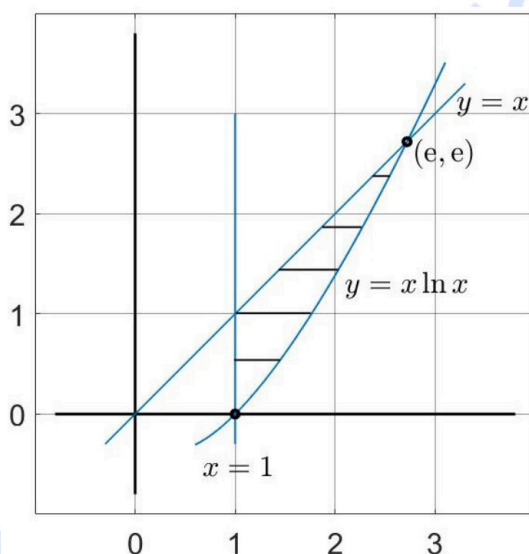


### MATEMÁTICAS II

4. Calcule a área da rexión determinada polas desigualdades  $x \geq 1$ ,  $y \leq x$  e  $y \geq f(x)$ , con  $f(x) = x \ln x$ . Faga un esbozo gráfico da rexión.

$$f(x) = x \ln x, \quad f'(x) = \ln x + x \frac{1}{x} = 1 + \ln x, \quad f''(x) = \frac{1}{x}.$$

Na zona de interese ( $x \geq 1$ ),  $f$  é crecente e convexa, porque tanto  $f'$  como  $f''$  son positivas. Como  $f(1) = 0$  e  $f(e) = e$ , a situación é a do debuxo seguinte, no que se raia a rexión cuxa área hai que calcular:



O valor do límite superior ( $x = e$ ) tamén pode obterse do xeito seguinte:

$$x = x \ln x \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e.$$

A área pedida é

$$A = \int_1^e (x - x \ln x) dx = \int_1^e x(1 - \ln x) dx.$$

Facendo partes coas eleccións

$$\begin{aligned} u &= 1 - \ln x & du &= -\frac{1}{x} dx \\ dv &= x dx & v &= \frac{1}{2} x^2 \end{aligned}$$

tense

$$\int x(1 - \ln x) dx = \frac{1}{2} x^2 (1 - \ln x) + \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} x^2 (1 - \ln x) + \frac{1}{4} x^2 + C,$$

co cal

$$\begin{aligned} A &= \int_1^e x(1 - \ln x) dx = \left[ \frac{1}{2} x^2 (1 - \ln x) + \frac{1}{4} x^2 \right]_{x=1}^{x=e} = \frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{4} = \frac{e^2 - 3}{4} \\ &\approx 1.0973 \text{ u}^2, \end{aligned}$$

onde u indica unidade de lonxitude.

**MATEMÁTICAS II**

5.

**5.a)** Ecuacións paramétricas da recta  $r$  que pasa polos puntos  $P(2, -1, 0)$  e  $Q(3, 0, 0)$  e a ecuación implícita ou xeral do plano  $\pi$  que pasa polo punto  $R(0, 4, -2)$  e é paralelo aos vectores  $\vec{u}(1, 0, -1)$  e  $\vec{v}(2, 1, -2)$ :

$$\vec{d}_r = \overrightarrow{PQ}(1, 1, 0) \Rightarrow r: \begin{cases} x = 3 + \lambda, \\ y = \lambda, \\ z = 0, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y - 4 & z + 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Como

$$\begin{vmatrix} x & y - 4 & z + 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2(y - 4) + z + 2 + 2(y - 4) + x = x + z + 2,$$

a ecuación do plano é

$$\pi: x + z + 2 = 0.$$

**5.b)** Ángulo agudo que forma a recta  $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$  co plano  $\pi: x + z + 2 = 0$ .

$$\vec{d}_r(1, 1, 0), \quad \vec{n}_\pi(1, 0, 1).$$

Se  $\alpha$  é o ángulo pedido,

$$\sin \alpha = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{\|\vec{d}_r\| \|\vec{n}_\pi\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ ou, equivalentemente, } 30^\circ.$$

**Nota:**  $| \quad |$  indica valor absoluto e  $\| \quad \|$  indica norma euclidiana en  $\mathbb{R}^3$ . Ás veces, emprégase a mesma notación para os dous conceptos, posto que  $| \quad |$  tamén é a norma euclidiana en  $\mathbb{R}$ .

**SOLUCIÓN ALTERNATIVA:**

$$\vec{d}_r \times \vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k} = (1, -1, -1).$$

$$\cos \alpha = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{\|\vec{d}_r \times \vec{n}_\pi\|}{\|\vec{d}_r\| \|\vec{n}_\pi\|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ ou, equivalentemente, } 30^\circ.$$

## MATEMÁTICAS II

6.

6.a) Punto simétrico de  $P(2, -1, 0)$  con respecto ao plano  $\pi: x + z + 2 = 0$ .

- Ecuacións paramétricas da recta  $r$  que pasa por  $P(2, -1, 0)$  e é perpendicular a  $\pi$ :

$$\vec{d}_r = \vec{n}_\pi(1, 0, 1), \text{ co cal } r: \begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = -1, \\ z = \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Corte de  $r$  con  $\pi$ :

$$(2 + \lambda) + \lambda + 2 = 2\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2.$$

Logo o punto de corte é  $Q(0, -1, -2)$ .

- Punto simétrico pedido: se chamamos  $P'(x', y', z')$  ao punto,

$$\begin{aligned} \frac{2 + x'}{2} &= 0 \Leftrightarrow x' = -2, \\ \frac{-1 + y'}{2} &= -1 \Leftrightarrow -1 + y' = -2 \Leftrightarrow y' = -1, \\ \frac{z'}{2} &= -2 \Leftrightarrow z' = -4. \end{aligned}$$

Tense logo  $P'(-2, -1, -4)$ .

6.b) Posición relativa das rectas  $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$  e  $s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$ . Se se cortan, calcule o punto de corte.

- Como  $\vec{d}_r(1, 1, 0)$  e  $\vec{d}_s(2, 1, -1)$  non son proporcionais ( $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{1}$ ), non son nin paralelas nin coincidentes, polo que ou ben se cortan, ou ben se cruzan.

- $[P(2, -1, 0) \in r, Q(2, -2, -1) \in s] \Rightarrow \overrightarrow{PQ}(0, -1, -1)$ .

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 - 1 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{PQ}, \vec{d}_r \text{ e } \vec{d}_s \text{ son coplanarios} \Rightarrow \mathbf{r \text{ e } s \text{ córtanse.}}$$

- Punto de corte:

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = -1 + \lambda, \\ z = 0, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}; \quad s: \begin{cases} x = 2 + 2\mu, \\ y = -2 + \mu, \\ z = -1 - \mu, \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

$$-1 - \mu = 0 \Leftrightarrow \mu = -1.$$

Logo o punto de corte é  $R(2 - 2, -2 - 1, -1 + 1) = \mathbf{R(0, -3, 0)}$ .

## MATEMÁTICAS II

7.

7.a) Calcular as catro probabilidades  $P(A)$ ,  $P(A \cap \bar{B})$ ,  $P(A|B)$  e  $P(B|A)$  sabendo que  $P(A \cup B) = 0.8$ ,  $P(A \cap B) = 0.2$  e  $P(A) = 2P(B)$ .

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.8 = P(A) + \frac{1}{2}P(A) - 0.2 \Rightarrow \frac{3}{2}P(A) = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{2}{3}$ .
- $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow \frac{2}{3} = 0.2 + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = \frac{2}{3} - \frac{2}{10} = \frac{20-6}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15} = 0.4\bar{6}$ .
- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{\frac{1}{2}P(A)} = \frac{2}{10} : \frac{1}{3} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0.6$ .
- $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{10} : \frac{2}{3} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0.3$ .

7.b)  $O$  = "participar online",  $E$  = "ser europeo". Sábese que  $P(O) = 0.6$ ,  $P(E) = 0.65$  e  $P(E|\bar{O}) = 0.8$ .

	$E$	$\bar{E}$	
$O$	33	27	<b>60</b>
$\bar{O}$	$40 \times 0.8 = 32$	8	40
	<b>65</b>	35	100

Segundo a táboa de continxencia,

$$P(E \cap O) = \frac{33}{100} = 0.33$$

e

$$P(O|E) = \frac{33}{65} \approx 0.5077.$$

ALTERNATIVA para 7.b):

- $0.8 = P(E|\bar{O}) = \frac{P(E \cap \bar{O})}{P(\bar{O})} = \frac{P(E \cap \bar{O})}{0.4} \Rightarrow P(E \cap \bar{O}) = 0.32 \Rightarrow P(E \cap O) = P(E) - P(E \cap \bar{O}) = 0.65 - 0.32 = 0.33$ .
- $P(O|E) = \frac{P(O \cap E)}{P(E)} = \frac{0.33}{0.65} \approx 0.5077$ .

## MATEMÁTICAS II

8.

**8.a)** Nunha certa zona húmida, a probabilidade de que un cabezolo chegue a ra adulta é do 2%. Se se escollen ao azar 2500 deses cabezolos, cal é a probabilidade de que ao menos 55 deles cheguen a ras adultas?

$X =$  "n.º de cabezolos que chegan a ras adultas, de entre os 2500".

$X \rightarrow B(n, p)$ , con  $n = 2500$  e  $p = 0.02$ . Tense logo  $q = 1 - p = 0.98$ . Pídese  $P(X \geq 55)$ .

$np = 50$ ,  $nq = 2450$ ,  $npq = 49$ ,  $\sqrt{npq} = 7$ . Como  $np > 5$  e  $nq > 5$ ,  $X$  pode aproximarse por  $\tilde{X} \rightarrow N(50, 7)$ .

$$Z = \frac{\tilde{X} - 50}{7} \rightarrow N(0, 1).$$

Aplicando a corrección de Yates ou de medio punto,

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 55) &\approx P(\tilde{X} \geq 54.5) = P\left(Z \geq \frac{54.5 - 50}{7}\right) \approx P(Z \geq 0.64) = 1 - P(Z < 0.64) \\
 &\approx 1 - 0.7389 = \mathbf{0.2611}.
 \end{aligned}$$

**8.b)**

$X =$  "puntuación"  $\rightarrow N(100, 20)$ , conque  $Z = \frac{X-100}{20} \rightarrow N(0, 1)$ . Pídese  $x$  tal que  $P(X \geq x) = 0.05$ .

$$P(X \geq x) = 0.05 \Leftrightarrow P\left(Z \geq \frac{x - 100}{20}\right) = 0.05 \Leftrightarrow P\left(Z < \frac{x - 100}{20}\right) = 0.95,$$

de onde

$$\frac{x - 100}{20} \approx 1.645 \Rightarrow x - 100 \approx 32.9 \Rightarrow x \approx \mathbf{132.9}.$$

## MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

### 1. Números e Álgebra:

a) Calcule  $A$  se  $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

b) Se  $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$  é invertible, obteña os valores de  $x$ ,  $y$  e  $z$  sabendo que  $\det(A - 3I) = 0$ , que  $y \neq 0$  e que  $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ . Enténdase que  $I$  é a matriz identidade.

### 2. Números e Álgebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro  $m$ , o sistema 
$$\begin{cases} (m+1)x & + & z & = & 1, \\ (m+1)x & + & y & + & z & = & m+1, \\ (m+1)x & + & my & + & (m-1)z & = & m. \end{cases}$$

### 3. Análise:

a) Enuncie os teoremas de Rolle e do valor medio do cálculo diferencial.

b) Explique se  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ , está ou non nas hipóteses do teorema do valor medio do cálculo diferencial. En caso de que o estea, calcule un valor  $c$  para o cal se cumpra a tese dese teorema.

### 4. Análise:

a) Calcule mediante cambio de variable as integrais  $\int (\sin x)^5 \cos x \, dx$  e  $\int (\ln x)/x \, dx$ .

b) Calcule  $\int (\ln x)/x \, dx$  empregando o método de integración por partes. Logo, obteña algún valor de  $B$  tal que  $\int_e^B (\ln x)/x \, dx = 3/2$ .

### 5. Xeometría:

a) Considérense o plano  $\pi: ax + y + z = 1$ , onde  $a$  é un parámetro real, e a recta  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$ . Estude a posición relativa de  $\pi$  e  $r$  en función de  $a$  e obteña o valor de  $a$  que fai que  $\pi$  e  $r$  sexan perpendiculares. Por último, razoe se  $r$  pode estar contida en  $\pi$  ou non.

b) Se  $\pi: -3x + y + z = 1$ , diga que valor ten que tomar  $b$  para que  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$  estea contida en  $\pi$ .

### 6. Xeometría:

Considérese o plano  $\pi: 2x - y + z = 1$ . Pídesese:

a) Calcular a distancia de  $\pi$  ao punto de corte das rectas  $r_1: \begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = 0, \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$  e  $r_2: \begin{cases} x = \mu, \\ y = -1 + \mu, \\ z = 0, \end{cases}$  ( $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ).

b) Obter o punto simétrico de  $P(1,0,0)$  con respecto a  $\pi$ .

### 7. Estatística e Probabilidade:

a) Calcule  $P(A|B)$  se  $B \subset A$ . Logo, se  $P(C) = 0.5$  e  $P(D) = 0.6$ , explique se  $C$  e  $D$  poden ser incompatibles. Por último, obteña  $P(E \cup F)$  e  $P(E \cap \bar{F})$  se  $E$  e  $F$  son independentes,  $P(E) = 0.3$  e  $P(F) = 0.2$ .

b) Tírase un dado sete veces. Calcule a probabilidade de que saian exactamente dous seis.

### 8. Estatística e Probabilidade:

Para un determinado grupo de pacientes, a tensión arterial sistólica (medida en mmHg) segue una distribución normal de media 123.6 e desviación típica 17.8. Calcule a probabilidade de que un paciente elixido ao azar teña unha tensión comprendida entre 100 e 120 mmHg. Logo, obteña o valor da tensión que é superado polo 67% dos pacientes.

## MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**.

### 1. Números y Álgebra:

a) Calcule  $A$  si  $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

b) Si  $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$  es invertible, obtenga los valores de  $x$ ,  $y$  y  $z$  sabiendo que  $\det(A - 3I) = 0$ , que  $y \neq 0$  y que  $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ . Entiéndase que  $I$  es la matriz identidad.

### 2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro  $m$ , el sistema 
$$\begin{cases} (m+1)x & + & z & = & 1, \\ (m+1)x & + & y & + & z & = & m+1, \\ (m+1)x & + & my & + & (m-1)z & = & m. \end{cases}$$

### 3. Análisis:

a) Enuncie los teoremas de Rolle y del valor medio del cálculo diferencial.

b) Explique si  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ , está o no en las hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial. En caso de que lo esté, calcule un valor  $c$  para el cual se cumpla la tesis de ese teorema.

### 4. Análisis:

a) Calcule mediante cambio de variable las integrales  $\int (\sin x)^5 \cos x \, dx$  y  $\int (\ln x)/x \, dx$ .

b) Calcule  $\int (\ln x)/x \, dx$  empleando el método de integración por partes. Luego, obtenga algún valor de  $B$  tal que  $\int_e^B (\ln x)/x \, dx = 3/2$ .

### 5. Geometría:

a) Considérense el plano  $\pi: ax + y + z = 1$ , donde  $a$  es un parámetro real, y la recta  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$ . Estudie la posición relativa de  $\pi$  y  $r$  en función de  $a$  y obtenga el valor de  $a$  que hace que  $\pi$  y  $r$  sean perpendiculares. Por último, razone si  $r$  puede estar contenida en  $\pi$  o no.

b) Si  $\pi: -3x + y + z = 1$ , diga qué valor tiene que tomar  $b$  para que  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$  esté contenida en  $\pi$ .

### 6. Geometría:

Considérense el plano  $\pi: 2x - y + z = 1$ . Se pide:

a) Calcular la distancia de  $\pi$  al punto de corte de las rectas  $r_1: \begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = 0, \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$  y  $r_2: \begin{cases} x = \mu, \\ y = -1 + \mu, \\ z = 0, \end{cases}$  ( $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ).

b) Obtener el punto simétrico de  $P(1,0,0)$  con respecto a  $\pi$ .

### 7. Estadística y Probabilidad:

a) Calcule  $P(A|B)$  si  $B \subset A$ . Luego, si  $P(C) = 0.5$  y  $P(D) = 0.6$ , explique si  $C$  y  $D$  pueden ser incompatibles. Por último, obtenga  $P(E \cup F)$  y  $P(E \cap \bar{F})$  si  $E$  y  $F$  son independientes,  $P(E) = 0.3$  y  $P(F) = 0.2$ .

b) Se tira un dado siete veces. Calcule la probabilidad de que salgan exactamente dos seises.

### 8. Estadística y Probabilidad:

Para un determinado grupo de pacientes, la tensión arterial sistólica (medida en mmHg) sigue una distribución normal de media 123.6 y desviación típica 17.8. Calcule la probabilidad de que un paciente elegido al azar tenga una tensión comprendida entre 100 y 120 mmHg. Luego, obtenga el valor de la tensión que es superado por el 67% de los pacientes.

## MATEMÁTICAS II

1.

1.a)  $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , de onde  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B^{-1}$ .

Como  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ , temos que  $\det B = 1 + 1 = 2$  e, polo tanto,

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

### SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

Se  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & a+b \\ c-d & c+d \end{pmatrix},$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} a-b & c-d \\ a+b & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left[ \begin{cases} a-b=1 \\ a+b=2 \end{cases} \right] \text{ e } \left[ \begin{cases} c-d=0 \\ c+d=1 \end{cases} \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[ \begin{cases} 2a=3 \\ b=2-a \end{cases} \right] \text{ e } \left[ \begin{cases} 2c=1 \\ c=d \end{cases} \right]$$

$$\Leftrightarrow [a = 3/2, \quad b = 1/2, \quad c = 1/2 \quad \text{e} \quad d = 1/2].$$

Logo

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

## MATEMÁTICAS II

1.b) Como  $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$  é invertible, sabemos que  $\det A = 3z - xy \neq 0$ .

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z - 3 \end{pmatrix}.$$

Ao ser  $\det(A - 3I) = -xy = 0$  e  $y \neq 0$ , necesariamente ten que ser  $x = 0$ . En consecuencia, tamén teremos  $z \neq 0$ , porque  $\det A = 3z - xy = 3z \neq 0$ . Neste punto, sábese que

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$$

con  $y$  e  $z$  non nulos. Obteremos os valores de  $y$  e  $z$  da igualdade

$$(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Posto que  $\det A = 3z$ ,

$$A^{-1} = \frac{1}{3z} \begin{pmatrix} z & -y \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{3z} \begin{pmatrix} z & 0 \\ -y & 3 \end{pmatrix},$$

conque

$$(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} z + 1 & 0 \\ -y & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$$

de onde se deduce que  $y = 1$  e  $z = 1$ .

En resumo, **os valores pedidos son  $x = 0$ ,  $y = 1$  e  $z = 1$** . Equivalentemente,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

### SOLUCIÓN ALTERNATIVA (que evita o cálculo da inversa):

Procédase como na resolución anterior ata chegar a que  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$  con  $y$  e  $z$  non

nulos. Agora nótese que a igualdade  $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$  implica que  $(3z)A^{-1} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ . Polo tanto,

$$\begin{pmatrix} 3z & 0 \\ 0 & 3z \end{pmatrix} = (3z)I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 3y & 0 \\ 3z & 3z \end{pmatrix},$$

de onde  $y = 1$  e  $z = 1$ .

## MATEMÁTICAS II

2.

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{array}{ccc|c} m+1 & 0 & 1 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 & m+1 \\ m+1 & m & m-1 & m \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1}} \left( \begin{array}{ccc|c} m+1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & m \\ 0 & m & m-2 & m-1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{F_3 - mF_2} \left( \begin{array}{ccc|c} m+1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & m \\ 0 & 0 & m-2 & -m^2 + m - 1 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} (m+1)x + z = 1, \\ y = m, \\ (m-2)z = -m^2 + m - 1. \end{cases}$$

Discusión:

- Se  $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ , entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é

$$z = \frac{-m^2 + m - 1}{m - 2}, \quad y = m, \quad x = \frac{1 - z}{m + 1}.$$

- Se  $m = -1$ , o sistema queda

$$\begin{cases} z = 1, \\ y = -1, \\ -3z = -3, \end{cases}$$

que é compatible indeterminado, porque ten as seguintes infinitas solucións:

$$x \in \mathbb{R}, \quad y = -1, \quad z = 1.$$

- Se  $m = 2$ , o sistema é incompatible, xa que a terceira ecuación queda  $0 = -3$ .

### SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$A = \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} m+1 & 0 & 1 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 & m+1 \\ m+1 & m & m-1 & m \end{array} \right).$$
 Sabemos que

$$\text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3 \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Como  $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ , é seguro que  $\text{rank } A \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$  e que  $[\text{rank } A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$ .

## MATEMÁTICAS II

$$\begin{aligned}
 \det A &= \begin{vmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{vmatrix} = (m+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m-1 \end{vmatrix} \\
 &= (m+1)(m-1+m-1-m) = (m+1)(m-2) = 0 \Leftrightarrow m \\
 &\in \{-1, 2\}.
 \end{aligned}$$

Discusión:

- **Caso  $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ :**  $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = n.^\circ$  de incógnitas, polo que **o sistema é compatible determinado.**

- **Caso  $m = -1$ :**  $\text{rank } A = 2$  e  $A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{array} \right)$ . Ao ser

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 1 + 1 = 0, \text{ tense que } \text{rank } A^* = 2 = \text{rank } A < 3 =$$

$n.^\circ$  de incógnitas, situación na que **o sistema é compatible indeterminado.**

- **Caso  $m = 2$ :**  $\text{rank } A = 2$  e  $A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right)$ . Ao ser  $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 1 -$

$2 - 2 = 5 \neq 0$ , tense que  $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$ , situación na que **o sistema é incompatible.**

## MATEMÁTICAS II

3.

3.a)

**Teorema de Rolle:** se  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é continua en  $[a, b]$ , derivable en  $(a, b)$ , e tal que  $f(a) = f(b)$ , entón existe algún  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .

**Teorema do valor medio:** se  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é continua en  $[a, b]$  e derivable en  $(a, b)$ , entón existe algún  $c \in (a, b)$  tal que  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ .

**3.b)** A función  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ , é claramente continua en  $[0,1]$ . Ademais,

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

conque  $f$  é derivable en  $(0,1)$ .

Logo  **$f$  si que está nas hipóteses do teorema do valor medio**, polo que ten que existir algún  $c \in (0,1)$  tal que  $f(1) - f(0) = f'(c)(1 - 0)$ .

Ao ser  $f(1) = 0$  e  $f(0) = 1$ , estamos a dicir que  $f'(c) = -1$  para algún  $c \in (0,1)$ .

Neste caso haberá un único valor posible para  $c$ , o cal se pode obter do seguinte xeito:

$$f'(c) = -1 \Leftrightarrow \frac{-c}{\sqrt{1 - c^2}} = -1 \Leftrightarrow c = \sqrt{1 - c^2} \Leftrightarrow [c^2 = 1 - c^2 \quad \text{e} \quad c > 0]$$

$$\Leftrightarrow [2c^2 = 1 \quad \text{e} \quad c > 0] \Leftrightarrow [c^2 = 1/2 \quad \text{e} \quad c > 0] \Leftrightarrow c = \sqrt{1/2}.$$

Obsérvese que  $c \in (0,1)$ .

## MATEMÁTICAS II

4.

4.a)

Facendo o cambio  $u = \sin x$ ,  $du = \cos x dx$ , tense

$$\int (\sin x)^5 \cos x dx = \int u^5 du = \frac{u^6}{6} + C = \frac{(\sin x)^6}{6} + C.$$

Facendo o cambio  $u = \ln x$ ,  $du = (1/x) dx$ , tense

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C.$$

4.b)

Primeira parte:

Tomando

$u = \ln x$	$du = \frac{1}{x} dx$
$dv = \frac{1}{x} dx$	$v = \ln x$

vese que

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = (\ln x)^2 - \int \frac{\ln x}{x} dx$$

Logo  $2 \int (\ln x)/x dx = (\ln x)^2 + K$  e, de aí,

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C.$$

Segunda parte:

$$\int_e^B \frac{\ln x}{x} dx = \left[ \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_e^B = \frac{1}{2} (\ln B)^2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow (\ln B)^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow (\ln B)^2 = 4.$$

Unha solución sae por tanto de

$$\ln B = 2 \Leftrightarrow B = e^2.$$

## MATEMÁTICAS II

5.

5.a) Temos  $\pi: ax + y + z = 1$  e  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$ .

- $\vec{n}_\pi(a, 1, 1)$  é normal a  $\pi$  e  $\vec{d}_r(2, 3, 3)$  ten a dirección de  $r$ . Como

$$\vec{n}_\pi \cdot \vec{d}_r = 2a + 6 = 0 \Leftrightarrow a = -3,$$

a recta é paralela ao plano se  $a = -3$  e corta ao plano nun punto se  $a \neq -3$ .

- Para que  $r$  e  $\pi$  sexan perpendiculares,  $\vec{n}_\pi(a, 1, 1)$  ten que ser paralelo a  $\vec{d}_r(2, 3, 3)$ :

$$\frac{a}{2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}.$$

- $P(1, 0, -1)$  é un punto de  $r$ . Para que  $r$  estea contida en  $\pi$  ten que ser  $a = -3$  e, á vez,  $P \in \pi$ , o que non é certo:  $-3 + 0 - 1 = -4 \neq 1$ . Logo  **$r$  non pode estar contida en  $\pi$ .**

5.b) Se  $\pi: -3x + y + z = 1$ , pídese o valor de  $b$  para que  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$  estea contida en  $\pi$ . Xa sabemos polo apartado anterior que  $\vec{n}_\pi(-3, 1, 1)$  e  $\vec{d}_r(2, 3, 3)$  son perpendiculares, de xeito que  $r$  estará contida en  $\pi$  se, e só se, un punto calquera da recta pertence tamén ao plano  $\pi$ . Tomando  $P(1, b, -1)$ ,

$$P(1, b, -1) \in \pi \Leftrightarrow -3 + b - 1 = 1 \Leftrightarrow b = 5.$$

## MATEMÁTICAS II

6.

6.a) Pídese a distancia de  $\pi: 2x - y + z = 1$  ao punto de corte das rectas

$$r_1: \begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = 0, \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \text{ e } r_2: \begin{cases} x = \mu, \\ y = -1 + \mu, \\ z = 0. \end{cases}$$

Podemos dar por feito que  $r_1$  e  $r_2$  se cortan. De  $-1 - \lambda = 0$  dedúcese que  $\lambda = -1$ , conque o punto de corte é  $P(1,0,0)$ .

A distancia de  $P(1,0,0)$  a  $\pi: 2x - y + z - 1 = 0$  é

$$d = \frac{|2 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

6.b) Punto simétrico de  $P(1,0,0)$  con respecto a  $\pi: 2x - y + z = 1$ :

- Ecuacións paramétricas da recta  $r$  que pasa por  $P(1,0,0)$  e é perpendicular a  $\pi$ :

$$\vec{d}_r = \vec{n}_\pi(2, -1, 1), \text{ co cal } r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda, \\ y = -\lambda, \\ z = \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Corte de  $r$  con  $\pi$ :

$$2(1 + 2\lambda) + \lambda + \lambda = 6\lambda + 2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{6}.$$

Posto que  $x = 1 + 2\lambda = 1 - 1/3 = 2/3$ ,  $y = -\lambda = 1/6$  e  $z = \lambda = -1/6$ , o punto de corte é

$$Q\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right).$$

- Punto simétrico de  $P(1,0,0)$  con respecto a  $\pi: 2x - y + z = 1$ : se chamamos  $P'(x', y', z')$  ao punto pedido, temos

$$\frac{1 + x'}{2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x' + 3 = 4 \Leftrightarrow x' = \frac{1}{3},$$

$$\frac{y'}{2} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 6y' = 2 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{3},$$

$$\frac{z'}{2} = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow 6z' = -2 \Leftrightarrow z' = -\frac{1}{3},$$

conque

$$P'\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

## MATEMÁTICAS II

7.

7.a)

- Se  $B \subset A$ , entón  $A \cap B = B$ , co cal

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

(Cando se fala de  $P(A|B)$ , dáse por feito que  $P(B)$  non é 0.)

- Se  $P(C) = 0.5$  e  $P(D) = 0.6$ , entón  **$C$  e  $D$  non poden ser incompatibles**, xa que, se o fosen,  $P(C \cap D)$  sería igual a 0 e, consecuentemente,

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) = P(C) + P(D) = 0.5 + 0.6 = 1.1$$

sería maior que 1, o que non é posible.

- Pídense  $P(E \cup F)$  e  $P(E \cap \bar{F})$  se  $E$  e  $F$  son independentes,  $P(E) = 0.3$  e  $P(F) = 0.2$ .

○  $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = 0.5 - P(E \cap F)$ . Por ser  $E$  e independentes,  $P(E \cap F) = P(E)P(F) = 0.06$ , co cal  **$P(E \cup F) = 0.44$** .

○ Da igualdade  $P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap \bar{F})$  obtense

$$P(E \cap \bar{F}) = P(E) - P(E \cap F) = 0.3 - 0.06 = \mathbf{0.24}.$$

Ou, doutro xeito,  **$P(E \cap \bar{F}) = P(E)P(\bar{F}) = 0.3 \cdot 0.8 = 0.24$** , xa que  $E$  e  $\bar{F}$  son independentes ao selo  $E$  e  $F$ .

7.b)

$X =$  "n.º de seises obtidos nas sete tiradas".

$X \rightarrow B(n, p)$ , con  $n = 7$  e  $p = 1/6$  (logo  $q = 1 - p = 5/6$ ).

$$P(X = 2) = \binom{7}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5^5}{(2!) \cdot 6^7} = \frac{7 \cdot 5^5}{2 \cdot 6^6} = \frac{21875}{93312} \approx 0.2344.$$

## MATEMÁTICAS II

8.  $X =$  “tensión arterial sistólica en mmHg”.

$$X \rightarrow N(123.6, 17.8) \Rightarrow Z = \frac{X - 123.6}{17.8} \rightarrow N(0, 1).$$

- $P(100 \leq X \leq 120) = P\left(\frac{100-123.6}{17.8} \leq Z \leq \frac{120-123.6}{17.8}\right) \approx P(-1.33 \leq Z \leq -0.20) = P(0.20 \leq Z \leq 1.33) = P(Z \leq 1.33) - P(Z \leq 0.20) \approx 0.9082 - 0.5793 = \mathbf{0.3289}$  é a probabilidade de que un paciente elixido ao azar teña unha tensión comprendida entre 100 e 120 mmHg.

- Pídese tamén o valor de  $t$  tal que  $P(X > t) = 0.67$ . Ao ser 0.67 maior que 0.5, é claro que  $t$  terá que ser menor que a media 123.6. Entón

$$P(X > t) = P\left(Z > \frac{t - 123.6}{17.8}\right) = P\left(Z < \frac{123.6 - t}{17.8}\right) = 0.67.$$

Indo á táboa da normal vese que

$$\frac{123.6 - t}{17.8} \approx 0.44,$$

de onde

$$t \approx 123.6 - 17.8 \cdot 0.44 = \mathbf{115.768}.$$



# Selectividad Academy

Tu academia de selectividad online

● Mejor academia online de selectividad

## Prueba sin compromiso

Primera clase gratis. Sin permanencia. Sin letra pequeña.

- ✓ Profesores especialistas en cada asignatura
- ✓ Clases adaptadas a tu nivel y tus objetivos
- ✓ Todos los exámenes oficiales resueltos paso a paso
- ✓ Calculadora de nota y guía completa en la web

**623 769 002**

Escríbenos por WhatsApp

[www.selectividad.academy](http://www.selectividad.academy)

→ Calcula tu nota en [selectividad.academy/calculadora-selectividad](http://selectividad.academy/calculadora-selectividad)

→ Guía completa en [selectividad.academy/guia-selectividad](http://selectividad.academy/guia-selectividad)

→ ¿Tienes dudas? Escríbenos sin compromiso