



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

Gizarte Zientziei Aplikatutako Matematika II Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II EAU 2023 USE

www.ehu.es





**GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA II**

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

- **Azterketa honek zortzi problema ditu lau bloketan banatuta. Zortzi problema horietatik lauri erantzun behar diezu, eta lau horiek gutxienez hiru bloke desberdinetakoak izan behar dute.**
- *Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.*

Kalkulagailu zientifikoak erabil daitezke, baina, **ezin ditu izan** ezaugarri hauek:

- pantaila grafikoa
- datuak igortzeko aukera
- programatzeko aukera
- ekuazioak ebazteko aukera
- matrize-eragiketak egiteko aukera
- determinanteen kalkulua egiteko aukera
- deribatuak eta integralak ebazteko aukera
- datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.

- **Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques. De estos ocho problemas tienes que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.**
- *En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.*

Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica
- posibilidad de transmitir datos
- programable
- resolución de ecuaciones
- operaciones con matrices
- cálculo de determinantes
- derivadas e integrales
- almacenamiento de datos alfanuméricos.



GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II



$N(0, 1)$ kurbak $-\infty$ -tik z -raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0, 1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000



**GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA II**

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

BLOKEA: ALJEBRA

A.1. [gehienez 2,5 puntu]

Izan bitez A eta B honako matrize hauek: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

- [0,75 puntu]** Egiazta ezazu B matrizea A matrizearen alderantzizkoa dela.
- [0,75 puntu]** Kalkula ezazu $(A - 2I_2)^2$ matrizea, non $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ den.
- [1 puntu]** Zehaztu ezazu X matrizea, non $A \cdot X = B$ den.

B.1. [gehienez 2,5 puntu]

Matematika azterketa batean problema hau proposatzen da:

“Adieraz ezazu non lortzen duen minimoa $F(x, y) = 6x + 3y - 2$ funtzioak, honako murrizketa hauek zehaztutako eskualdean:

$$2x + y \geq 6 ; 2x + 5y \leq 30 ; 2x - y \leq 6 ”$$

- [2,2 puntu]** Jimenak funtzioaren minimoa (1, 2) puntuan lortzen dela erantzun du, eta Ivánek, berriz, (3, 0) puntuan.
 - Egia al da funtzioaren minimoa (1, 2) puntuan lortzen dela?
 - Zehatza al da Ivánen erantzuna?

Arrazoitu zure erantzunak.

- [0,3 puntu]** Zenbat balio du aipatutako minimo horrek?



Mates CCSS: practica con exámenes reales y sube tu nota.

selectividad.academy - 623 769 002



**GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA II**

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

BLOKEA: ANALISIA

A.2. [gehienez 2,5 puntu]

Honako $I(t)$ funtzio honek adierazten du zer irabazi/galera (milaka eurotan) izan dituen enpresa batek sortu zenetik:

$$I(t) = \frac{8t - 16}{t + 1}, \quad t \geq 0$$

non t igarotako denbora (urtetan), eta $I(t)$ irabaziak/galerak diren.

- [0,4 puntu]** Egin ezazu $I(t)$ funtzioaren adierazpen grafikoa.
- [0,3 puntu]** Zenbat izan zen hasierako inbertsioa (hasierako kapitala)?
- [0,3 puntu]** Zein urtetan irabazi du 5.600 €?
- [0,5 puntu]** Zein urtetatik aurrera hasten da enpresa irabaziak lortzen?
- [0,3 puntu]** Aztertu funtzioaren eboluzioa (gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak).
- [0,7 puntu]** Horrela jarraituz gero, zein da irabazien/galeren bilakaeraren joera? Funtzioaren ezaugarriren batekin lotzen duzu?

B.2. [gehienez 2,5 puntu]

Izan bedi $f(x)$ funtzio hau:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - a & \text{baldin eta } x \leq 0 \\ x - 1 & \text{baldin eta } 0 < x < 2 \\ bx - 5 & \text{baldin eta } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{bada}$$

- [1,2 puntu]** Aurkitu itzazu a eta b parametroen balioak $f(x)$ funtzioa \mathbb{R} zenbaki errealean multzoan jarraitua izan dadin.
- [0,5 puntu]** $a = 0$ eta $b = 3$ kasuan, egin ezazu $f(x)$ funtzioaren adierazpen grafikoa.
- [0,8 puntu]** $a = 0$ eta $b = 3$ kasuan, kalkula ezazu $f(x)$ funtzioaren grafikoak, OX abzisa-ardatzak, eta $x = 1$ eta $x = 3$ zuzenek mugatutako eskualdearen azalera.



**GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA II**

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

BLOKEA: PROBABILITATEA

A.3. *[[gehienez 2,5 puntu]]*

Gorka, futbol talde jakin bateko jokalaria, titular izan da ligako partiduen % 80tan. Beraren taldeak Gorka titular izan den partiduen % 40 irabazi ditu; eta titular izan ez denean, taldeak partiduen % 45 irabazi ditu.

- [[0,8 puntu]]* Zein da taldeak partidu bat irabazteko probabilitatea?
- [[0,6 puntu]]* Taldeak irabazi duela jakinda, zein da Gorka titular izanaren probabilitatea?
- [[0,6 puntu]]* Kalkula ezazu Gorka titular ez izateko eta taldeak irabazteko probabilitatea.
- [[0,5 puntu]]* “Titular izatea” eta “partidua irabaztea” gertaerak askeak dira? Arrazoitu ezazu zure erantzuna.

B.3. *[[gehienez 2,5 puntu]]*

Kutxa batek 5 bola gorri eta 3 berde ditu. Bola bat atera eta beste koloreko bi bolarekin ordezkutzen da. Ondoren, bigarren bola bat ateratzen da.

Kalkula itzazu:

- [[1,4 puntu]]* Ateratako bigarren bola berdea izateko probabilitatea.
- [[1,1 puntu]]* Ateratako lehenengo bola gorria izanaren probabilitatea, jakinda bigarren bola gorria izan dela.



Guía completa en selectividad.academy/guia-selectividad

Todo sobre la selectividad



**GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA II**

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

BLOKEA: INFERENTZIA ESTADISTIKOA

A.4. [gehienez 2,5 puntu]

Marka jakin bateko txokolatzeko tableten pisu garbia aldagai aleatorio bat da, eta μ batezbesteko ezezaguna eta 7 gramoko desbideratze tipikoa dituen banaketa normal bati jarraitzen dio.

Badakigu zoriz aukeratutako 36 txokolatzeko tabletak guztira 5.274 gramoko pisua eman dutela.

- [1,7 puntu]** Kalkula ezazu μ batezbestekorako konfiantza tarte, % 94ko konfiantza-mailaz.
- [0,8 puntu]** Konfiantza-maila beraz, gutxienez zenbat tableta hartu beharko dira lagintzat, lortuko den konfiantza tartearen zabalera, gehienez, 3 gramo izan dadin?

B.4. [gehienez 2,5 puntu]

A jokalaria txanpon orekatu batekin jaurtiketak egiten ditu, eta B jokalaria, berriz, txanpon trukatu batekin. Txanpon trukatu horrekin aurpegia lortzeko probabilitatea 0,4 da.

Jaurtiketa horiekin lotuta, honako banaketa binomial hauek jarraitzen dituzten aldagaiak definitzen ditugu:

- +** X : A jokalaria n jaurtiketatan lortutako aurpegi kopurua, $X \equiv B(n, p)$
 - $n =$ txanpon orekatuarekin egindako jaurtiketa kopurua .
 - $p =$ txanpon orekatuarekin aurpegia ateratzeko probabilitatea .

- +** Y : B jokalaria n' jaurtiketatan lortutako gurutze kopurua, $Y \equiv B(n', p')$
 - $n' =$ txanpon trukatuarekin egindako jaurtiketa kopurua .
 - $p' =$ txanpon trukatuarekin gurutzea ateratzeko probabilitatea .

- [0,6 puntu]** Kalkula ezazu A jokalaria bere txanpon orekatuarekin 3 jaurtiketatan 3 aurpegi lortzeko probabilitatea.
- [0,6 puntu]** Kalkula ezazu B jokalaria bere txanpon trukatuarekin bi jaurtiketatan 2 gurutze lortzeko probabilitatea.



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO
PROBAK

2023ko EZOHIOA

**GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA II**

PRUEBAS DE ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

EXTRAORDINARIA 2023

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

- c) **[[1,3 puntu]]** Zeinek du probabilitate altuagoa, A jokalaria 400 jaurtiketatan bere txanpon orekatuarekin 190 aurpegi baino gutxiago lortzeak ala B jokalaria 200 jaurtiketatan bere txanpon trukatuarekin 110 gurutze baino gutxiago lortzeak? **Arrazoitu ezazu erantzuna.**

selectividad.academy
2023

● Tú puedes. Y nosotros te ayudamos a demostrarlo.

Prueba gratis



GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1. [hasta 2,5 puntos]

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

- [0,75 puntos]** Comprueba que la matriz B es la inversa de la matriz A .
- [0,75 puntos]** Calcula la matriz $(A - 2I_2)^2$, donde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- [1 punto]** Calcula la matriz X tal que $A \cdot X = B$.

B.1. [hasta 2,5 puntos]

En un examen de matemáticas se propone el siguiente problema:

“Indica dónde alcanza el mínimo la función $F(x, y) = 6x + 3y - 2$, en la región determinada por las siguientes restricciones:

$$2x + y \geq 6 ; 2x + 5y \leq 30 ; 2x - y \leq 6 .”$$

- [2,2 puntos]** Jimena responde que el mínimo de la función se alcanza en el punto $(1, 2)$ e Iván, por el contrario, que lo hace en el punto $(3, 0)$.
 - ¿Es cierto que el mínimo de la función se alcanza en el punto $(1, 2)$?
 - ¿Es exacta la respuesta de Iván?

Razona tus respuestas.

- [0,3 puntos]** ¿Cuánto vale dicho mínimo?



¿Algo no te sale? Aquí estamos para ayudarte

623 769 002



GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II

BLOQUE: ANÁLISIS

A.2. [hasta 2,5 puntos]

La siguiente función $I(t)$ representa las ganancias/pérdidas (en miles de euros) de una empresa desde que se fundó:

$$I(t) = \frac{8t - 16}{t + 1}, \quad t \geq 0$$

donde t es el tiempo pasado (en años), e $I(t)$ son las ganancias/pérdidas.

- [0,4 puntos]** Realiza la representación gráfica de la función $I(t)$.
- [0,3 puntos]** ¿Cuánto fue la inversión inicial (capital inicial)?
- [0,3 puntos]** ¿En qué año ganó 5.600 €?
- [0,5 puntos]** ¿A partir de qué año la empresa comienza a obtener ganancias?
- [0,3 puntos]** Analiza la evolución de la función (intervalos de crecimiento y decrecimiento).
- [0,7 puntos]** En caso de seguir así, ¿cuál es la tendencia de la evolución de las ganancias/pérdidas? ¿La relacionas con alguna característica de la función?

B.2. [hasta 2,5 puntos]

Sea la función $f(x) = \begin{cases} -2x - a & \text{si } x \leq 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 < x < 2 \\ bx - 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

- [1,2 puntos]** Halla los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x)$ sea continua en el conjunto de los números reales \mathbb{R} .
- [0,5 puntos]** Representa la gráfica de la función $f(x)$ para los valores de los parámetros $a = 0$ y $b = 3$.
- [0,8 puntos]** Para los valores $a = 0$ y $b = 3$, calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas OX , y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.



**GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA II**

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

BLOQUE: PROBABILIDAD

A.3. *[[hasta 2,5 puntos]]*

Gorka, jugador de un equipo de fútbol, ha sido titular en un 80 % de los partidos de la liga. Su equipo ha ganado un 40 % de los partidos en los que Gorka ha sido titular; y cuando no lo ha sido, su equipo ha ganado un 45 % de los partidos.

- [[0,8 puntos]]* ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo gane un partido?
- [[0,6 puntos]]* Sabiendo que ha ganado su equipo, ¿cuál es la probabilidad de que Gorka haya sido titular?
- [[0,6 puntos]]* Calcula la probabilidad de que Gorka no sea titular y que su equipo gane el partido.
- [[0,5 puntos]]* ¿Los sucesos “ser titular” y “ganar el partido” son sucesos independientes? Razona tu respuesta.

B.3. *[[hasta 2,5 puntos]]*

Una urna contiene 5 bolas rojas y 3 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por dos bolas del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola.

Calcula:

- [[1,4 puntos]]* La probabilidad de que la segunda bola extraída sea verde.
- [[1,1 puntos]]* La probabilidad de que la primera bola extraída haya sido roja, sabiendo que la segunda bola ha sido roja.



Cada examen practicado te acerca a tu objetivo

selectividad.academy



**GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA II**

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

A.4. [hasta 2,5 puntos]

El peso neto de las tabletas de chocolate de una determinada marca es una variable aleatoria normal con media desconocida μ y desviación típica 7 gramos. Sabemos que 36 tabletas de chocolate, elegidas al azar, han dado un peso total de 5.274 gramos.

- [1,7 puntos]** Calcula el intervalo de confianza para la media μ con un nivel de confianza del 94 %.
- [0,8 puntos]** Con el mismo nivel de confianza, ¿cuántas tabletas, como mínimo, habrá que tomar en la muestra para que la amplitud del intervalo de confianza que se obtenga sea, como máximo, de 3 gramos?

B.4. [hasta 2,5 puntos]

Un jugador A realiza lanzamientos con una moneda equilibrada, mientras que otro jugador B lo hace con una moneda trucada. La probabilidad de obtener cara con la moneda trucada es 0,4. Asociadas a dichos lanzamientos se definen las variables que siguen las siguientes distribuciones binomiales:

- \oplus X : número de caras que obtiene el jugador A en n lanzamientos, $X \equiv B(n, p)$
 - n = número de lanzamientos con la moneda equilibrada.
 - p = probabilidad de obtener cara con la moneda equilibrada.

- \oplus Y : número de cruces que obtiene el jugador B en n' lanzamientos, $Y \equiv B(n', p')$
 - n' = número de lanzamientos con la moneda trucada.
 - p' = probabilidad de obtener cruz con la moneda trucada.

- [0,6 puntos]** Calcula la probabilidad de que el jugador A obtenga 3 caras en 3 lanzamientos con su moneda equilibrada.
- [0,6 puntos]** Calcula la probabilidad de que el jugador B obtenga 2 cruces en 2 lanzamientos con su moneda trucada.



Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

2023ko EZOHIOA

**GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA II**

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

EXTRAORDINARIA 2023

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

- c) **[1,3 puntos]** ¿Qué es más probable, que el jugador A obtenga menos de 190 caras en 400 lanzamientos con su moneda equilibrada o que el jugador B obtenga menos de 110 cruces en 200 lanzamientos con su moneda trucada? **Justifica la respuesta.**

selectividad.academy
2023



MATEMATICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

1. El examen está compuesto de ocho ejercicios.
2. *De estos ocho ejercicios se tiene que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.*
3. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.
4. El examen se evaluará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
5. Cada ejercicio se valorará entre 0 y 2,5 puntos.
6. En aquellas cuestiones en las que no se especifique el método de resolución que se ha de aplicar, se admitirá cualquier forma de resolverlo correctamente.

ASPECTOS QUE MERECE VALORACIÓN POSITIVA

- Los planteamientos correctos, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
- La correcta utilización de conceptos, vocabulario y notación científica.
- El conocimiento de técnicas específicas de aplicación directa para el cálculo y/o interpretación de datos numéricos y gráficos.
- La terminación completa del ejercicio y la exactitud del resultado.
- Se considerarán igualmente válidas dos soluciones que solo se diferencien en el grado de exactitud empleado en los cálculos numéricos.
- No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual.
- La claridad de las explicaciones de los pasos seguidos.
- Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, ..., que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución.
- La pulcritud de la presentación, y cualquier otro aspecto que refleje la madurez que cabe esperar de un estudiante que aspira a entrar en la universidad.



ASPECTOS QUE MERECE VALORACIÓN NEGATIVA

- Los planteamientos incorrectos.
- La confusión de conceptos.
- La abundancia de errores de cálculo (por ser indicativa de deficiencias de orden básico).
- Los errores aislados, cuando indican falta de reflexión crítica o de sentido común (por ejemplo, decir que la solución a tal problema es -3,7 frigoríficos, o que cierta probabilidad vale 2,5).
- Los errores aislados, cuando conducen a problemas más sencillos que los inicialmente propuestos.
- La ausencia de explicaciones, en particular del significado de las variables que se están utilizando.
- Los errores ortográficos graves, el desorden, la falta de limpieza, la mala redacción y cualquier otro aspecto impropio de un estudiante que aspira a entrar en la universidad.



CRITERIOS PARTICULARES PARA CADA UNO DE LOS PROBLEMAS

BLOQUE: ÁLGEBRA

Problema A.1 (hasta 2,5 puntos)

a. 0,75 puntos

- 1ª forma
 - Definición de la inversa, **0,25 puntos.**
 - Cálculo de la matriz $B \cdot A$, **0,25 puntos.**
 - Cálculo de la matriz $A \cdot B$, **0,25 puntos.**

- 2ª forma
 - Determinante de A , **0,15 puntos.**
 - Adjuntos, **0,5 puntos.**
 - Cálculo de la matriz inversa de A , **0,1 puntos.**

b. 0,75 puntos

- Cálculo de la matriz $A - 2I_2$, **0,25 puntos.**
- Calcular la matriz $(A - 2I_2)^2$, **0,5 puntos.**

c. 1 punto

- Obtener la expresión para determinar X , **0,25 puntos.**
 - 1. forma
 - Cálculo de la matriz B^2 , **0,75 puntos.**
 - 2. forma
 - Cálculo de la matriz A^{-1} , **0,5 puntos.**
 - Cálculo de la matriz $A^{-1} \cdot B$, **0,25 puntos.**



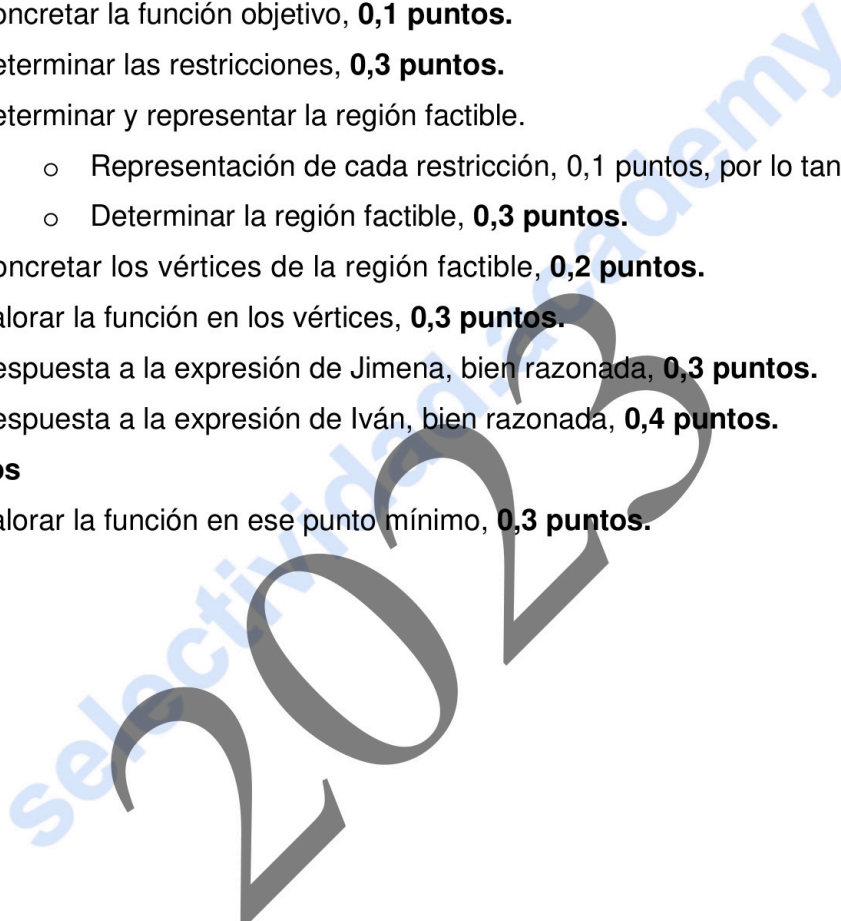
Problema B.1 (hasta 2,5 puntos)

a. 2,2 puntos

- Concretar la función objetivo, **0,1 puntos**.
- Determinar las restricciones, **0,3 puntos**.
- Determinar y representar la región factible.
 - Representación de cada restricción, 0,1 puntos, por lo tanto, **0,3 puntos**.
 - Determinar la región factible, **0,3 puntos**.
- Concretar los vértices de la región factible, **0,2 puntos**.
- Valorar la función en los vértices, **0,3 puntos**.
- Respuesta a la expresión de Jimena, bien razonada, **0,3 puntos**.
- Respuesta a la expresión de Iván, bien razonada, **0,4 puntos**.

b. 0,3 puntos

- Valorar la función en ese punto mínimo, **0,3 puntos**.





BLOQUE: ANÁLISIS

Problema A.2 (hasta 2,5 puntos)

- a. **0,4 puntos**
- Representación gráfica de la función $f(x)$, **0,4 puntos.**
- b. **0,3 puntos**
- Respuesta razonada, **0,3 puntos.**
- c. **0,3 puntos**
- Respuesta razonada, **0,3 puntos.**
- d. **0,5 puntos**
- Respuesta razonada, **0,5 puntos.**
- e. **0,3 puntos**
- Respuesta razonada, **0,3 puntos.**
- f. **0,7 puntos**
- Respuesta razonada, **0,3 puntos.**
 - Relacionarlo con una característica de la función, **0,4 puntos.**

**Problema B.2** (hasta 2,5 puntos)**a. 1,2 puntos**

- Continuidad en los intervalos $(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, \infty)$, **0,3 puntos**.
- Definir la continuidad de una función en un punto, **0,1 puntos**.
 - En el punto $x = 0$.
 - ✚ Cálculo de los límites laterales, **0,2 puntos**.
 - ✚ Determinar el valor $f(0)$, **0,1 puntos**.
 - ✚ Determinar el valor del parámetro a , **0,1 puntos**.
 - En el punto $x = 2$.
 - ✚ Cálculo de los límites laterales, **0,2 puntos**.
 - ✚ Determinar el valor $f(2)$, **0,1 puntos**.
 - ✚ Determinar el valor del parámetro b , **0,1 puntos**.

b. 0,5 puntos

- Representación gráfica de la función, **0,5 puntos**.

c. 0,8 puntos

- Determinar las integrales definidas $A_1 + A_2$, **0,2 puntos**.
- Cálculo de las integrales definidas.
 - Cálculo de la integral definida A_1 , **0,3 puntos**.
 - Cálculo de la integral definida A_2 , **0,3 puntos**.



BLOQUE: PROBABILIDAD

Problema A.3 (hasta 2,5 puntos)

a. 0,8 puntos

- Hacer una tabla de contingencia o un diagrama de árbol, **0,3 puntos**.
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,5 puntos**.

b. 0,6 puntos

- Determinar qué tiene que calcular, **0,1 puntos**.
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,5 puntos**.

c. 0,6 puntos

- Determinar qué tiene que calcular, **0,1 puntos**.
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,5 puntos**.

d. 0,5 puntos

- Determinar en qué consiste que dos sucesos sean independientes, **0,1 puntos**.
- Cálculos, **0,2 puntos**.
- Concluir cómo son los sucesos, **0,2 puntos**.

Problema B.3 (hasta 2,5 puntos)

a. 1,4 puntos

- Hacer un diagrama de árbol o algún esquema, **0,3 puntos**.
- Indicar la probabilidad total de un suceso o su fórmula, **0,4 puntos**.
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,7 puntos**.

b. 1,1 puntos

- Indicar la fórmula de la probabilidad a posteriori, Teorema de Bayes, **0,4 puntos**.
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,7 puntos**.



BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

Problema A.4 (hasta 2,5 puntos)

a. 1,7 puntos

- Determinar la media muestral, **0,4 puntos**.
- Determinar la fórmula del intervalo de confianza para la media, **0,3 puntos**.
- Determinar $z_{\frac{\alpha}{2}}$, **0,5 puntos**.
- El intervalo de confianza pedido, **0,5 puntos**.

b. 0,8 puntos

- Expresar qué es el error, **0,2 puntos**.
- Indicar la fórmula del error, **0,2 puntos**.
- El cálculo del tamaño de la muestra, **0,4 puntos**.

Problema B.4 (hasta 2,5 puntos)

a. 0,6 puntos

- Determinar la distribución, **0,2 puntos**.
- Cálculo de $P(X = 3)$, **0,4 puntos**.

b. 0,6 puntos

- Determinar la distribución, **0,2 puntos**.
- Cálculo de $P(Y = 2)$, **0,4 puntos**.

c. 1,3 puntos

- **Jugador A.**
 - Concreción de la distribución normal a través de la aproximación de Yates, **0,15 puntos**.
 - Cálculo de la probabilidad pedida, **0,5 puntos**.
- **Jugador B.**
 - Concreción de la distribución normal a través de la aproximación de Yates, **0,15 puntos**.
 - Cálculo de la probabilidad pedida **0,5 puntos**.



SOLUCIONES

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1. Cálculo matricial. Cálculo de la matriz inversa. Ecuación matricial.

a) Comprobamos que $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ es la inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$:

$$\color{blue}{\oplus} B = A^{-1} \Leftrightarrow B \cdot A = I_2 \quad \wedge \quad A \cdot B = I_2$$

$$\circ B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$\circ A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Por lo tanto, $B = A^{-1}$

OTRA MANERA

$\color{blue}{\oplus}$ Calculamos A^{-1} :

$$\circ |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

o Adjuntos

$$\blacksquare A_{11} = (-1)^2 \cdot 2 = 2$$

$$\blacksquare A_{21} = (-1)^3 \cdot 1 = -1$$

$$\blacksquare A_{12} = (-1)^3 \cdot 3 = -3$$

$$\blacksquare A_{22} = (-1)^4 \cdot 2 = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj } A)^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = B \Rightarrow B = A^{-1}$$

b) Calculamos $(A - 2I)^2$:

$$(A - 2I)^2 = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 I_2$$

$$\Rightarrow (A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 I_2$$



c) Calculamos la matriz X tal que $A \cdot X = B$.

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = B \cdot B = B^2 \Rightarrow X = B^2$$

apartado a) $A^{-1} = B$

$$X = B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$$

2023
selectividad.academy



B.1. Resolución de un problema de programación lineal con dos variables.

- La función objetivo es:

$$F(x, y) = 6x + 3y - 2$$

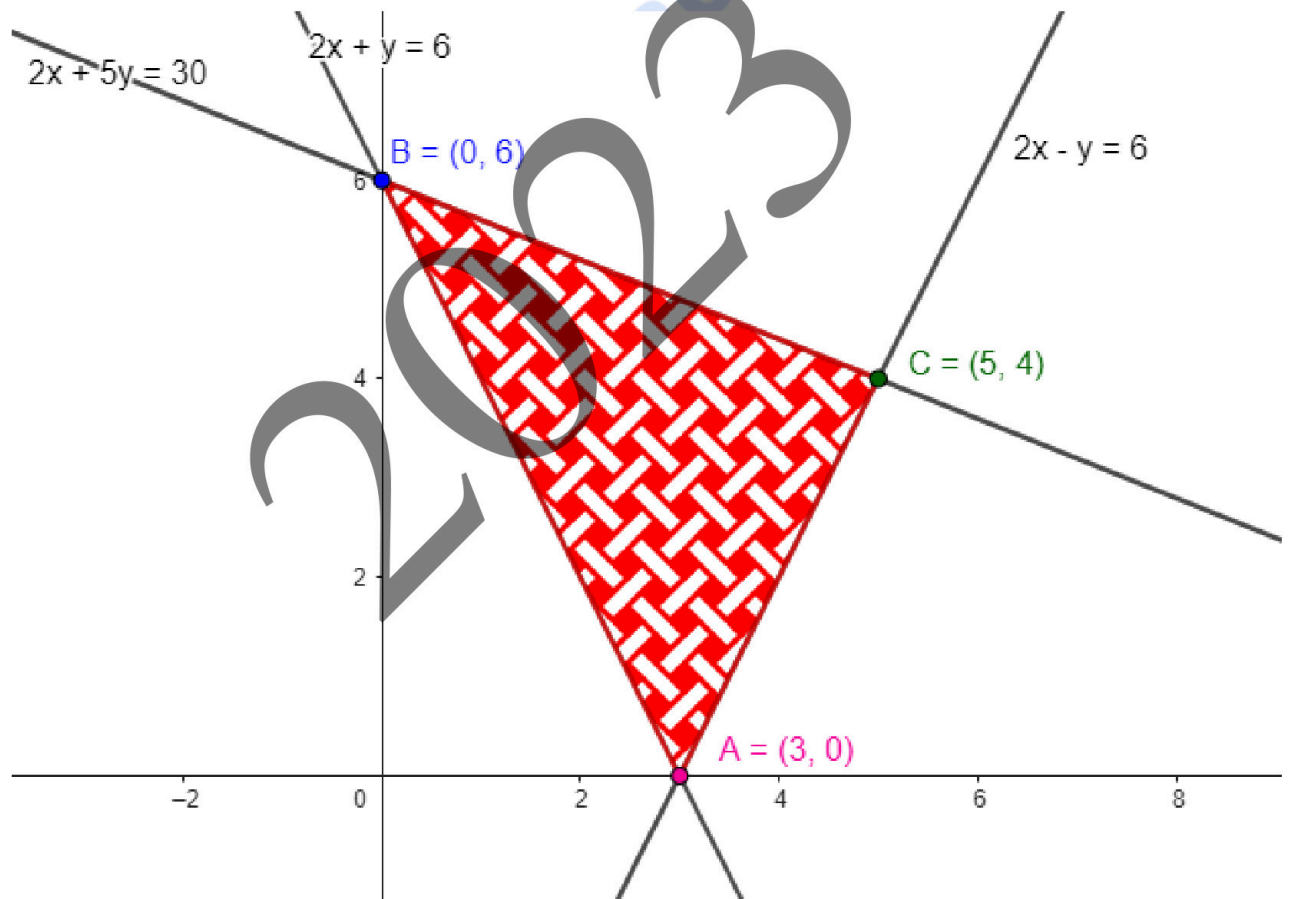
- Las restricciones son:

$$2x + y \geq 6$$

$$2x + 5y \leq 30$$

$$2x - y \leq 6$$

- En el plano XY, la región factible es:



- Los vértices del recinto son los puntos:

$$A(3, 0) ; B(0, 6) ; C(5, 4).$$

- Calculamos los valores que toma la función $F(x, y) = 6x + 3y - 2$ en dichos puntos:

$$F(A) = F(3, 0) = 16$$

$$F(B) = F(0, 6) = 16$$

$$F(C) = F(5, 4) = 40$$



**ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN**

- a) Jimena responde que se alcanza en el punto $(1, 2)$ e Iván que lo hace en el punto $(3, 0)$.
- ¿Es cierto que el mínimo se alcanza en el punto $(1, 2)$?
No. El punto $(1, 2)$ no está en la región factible porque no cumple alguna de las restricciones, por lo tanto, es imposible que el mínimo se alcance en ese punto.
 - ¿Es exacta la respuesta de Iván?
No, porque el mínimo se obtiene no sólo en el punto $A(3, 0)$, sino en todos los puntos del segmento \overline{AB} . Por lo tanto, la respuesta, aun no siendo falsa, no es exacta.
- b) ¿Cuánto vale dicho mínimo?
El mínimo vale 16.

selectividad.academy
2023



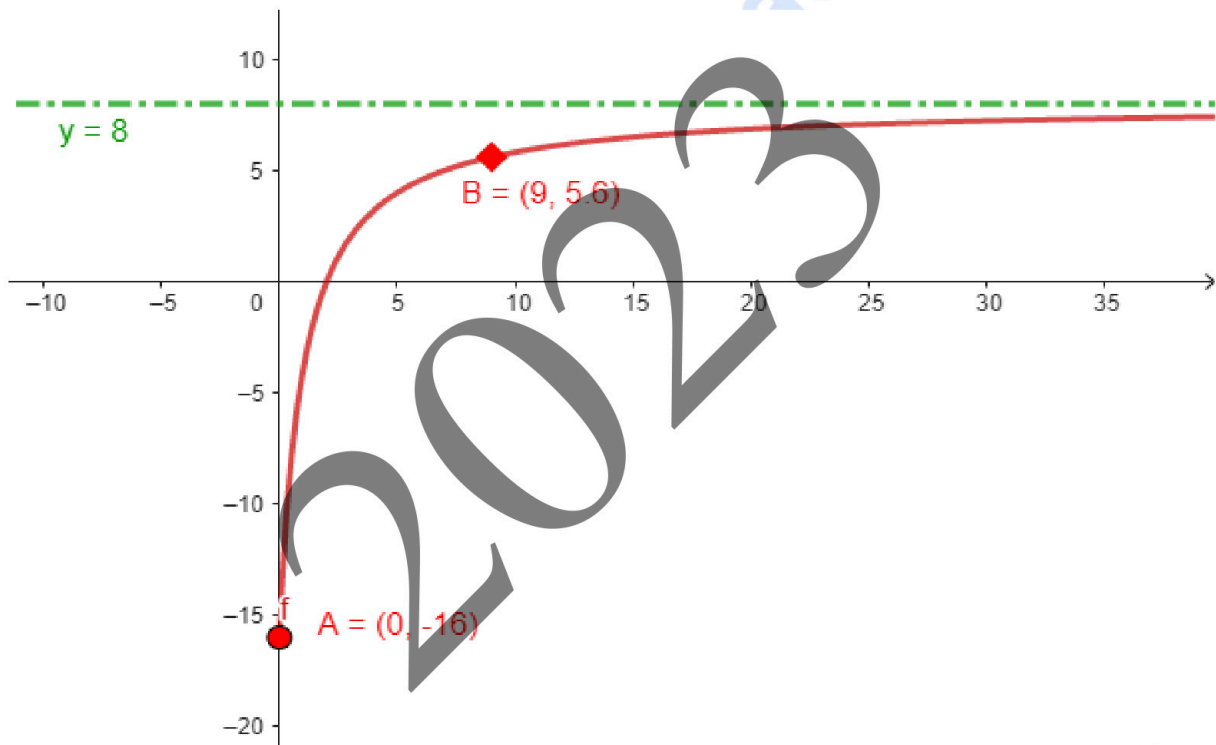
BLOQUE: ANÁLISIS

A.2. Problema de análisis de una función. Cálculo de los máximos y mínimos relativos de una función y representación gráfica. Características de la función.

$$I(t) = \frac{8t - 16}{t + 1}, \quad t \geq 0.$$

$I(t)$ expresa las ganancias/pérdidas de la empresa (en miles de euros) en función del tiempo t (en años).

a) La representación gráfica de la función.



b) ¿Cuánto fue la inversión inicial (capital inicial)?

La inversión inicial es el valor que corresponde al valor de $I(t)$ cuando $t = 0$

$$\Rightarrow I(0) = -16 \Rightarrow \text{la inversión inicial (o capital inicial) fue } \mathbf{16.000 \text{ €.}}$$

Corresponde al punto A en la gráfica.

c) ¿En qué año ganó 5.600 €?

5.600 € corresponde a $I(t) = 5,6$, porque se mide en miles de euros.

$$I(t) = 5,6 = \frac{8t - 16}{t + 1} \Rightarrow 5,6t + 5,6 = 8t - 16 \Rightarrow 21,6 = 2,4t \Rightarrow t = 9$$

Por lo tanto, **es en el año $t = 9$.**

Corresponde al punto B en la gráfica.



d) ¿A partir de qué año la empresa empieza a obtener ganancias?

$$I(t) = \frac{8t - 16}{t + 1} \geq 0 \Rightarrow 8t - 16 \geq 0 \Rightarrow t \geq 2$$

A partir del segundo año ($t \geq 2$).

OTRA MANERA

$$\begin{cases} I(t) = \frac{8t - 16}{t + 1} \\ I(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{8t - 16}{t + 1} = 0 \Rightarrow 8t - 16 = 0 \Rightarrow t = 2$$

y $I(t)$ es creciente (en su dominio de definición) \Rightarrow la empresa empezó a obtener ganancias partir del segundo año.

e) Analiza la evolución de la función (intervalos de crecimiento y decrecimiento).

La evolución siempre es positiva, porque es una función creciente en su dominio de definición $[0, \infty)$.

f) En caso de seguir así, ¿cuál es la tendencia de la evolución de las ganancias/perdidas?
¿Lo relacionas con alguna característica de la función?

Para analizar la tendencia de la evolución de las ganancias/pérdidas a medida que pasan los años, calculamos el límite de la función $I(t)$ cuando t tiende a ∞ . Es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8t - 16}{t + 1} = 8$$

Por lo tanto, **las ganancias/pérdidas se estabilizan alrededor de unas ganancias de 8.000 €.**

La recta $I(t) = 8$ es una asíntota horizontal de la función y esa es la tendencia de la función a medida que pasan los años.



B.2. Estudio de la continuidad de una función. Representación gráfica.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - a & \text{si } x \leq 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 < x < 2 \\ bx - 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Halla los valores de a y b para que la función sea continua en \mathbb{R} .

- En $\mathbb{R} - \{0, 2\} = (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, \infty)$, $f(x)$ es continua por definición de la función, dado que son polinomios.
- En $x = 0$

$$f(x) \text{ continua en } x = x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2x - a) = -a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1) = -1 \quad \Rightarrow a = 1$$

$$f(0) = -a$$

• En $x = 2$

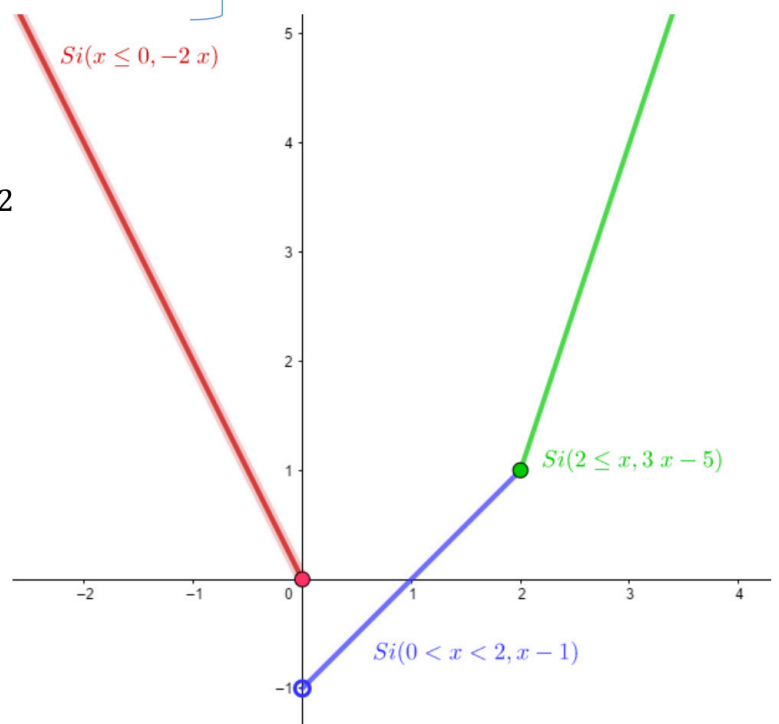
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (bx - 5) = 2b - 5 \quad \Rightarrow 2b - 5 = 1 \Rightarrow b = 3$$

$$f(2) = 2b - 5$$

b) Representa la gráfica de la función.

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 3x - 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

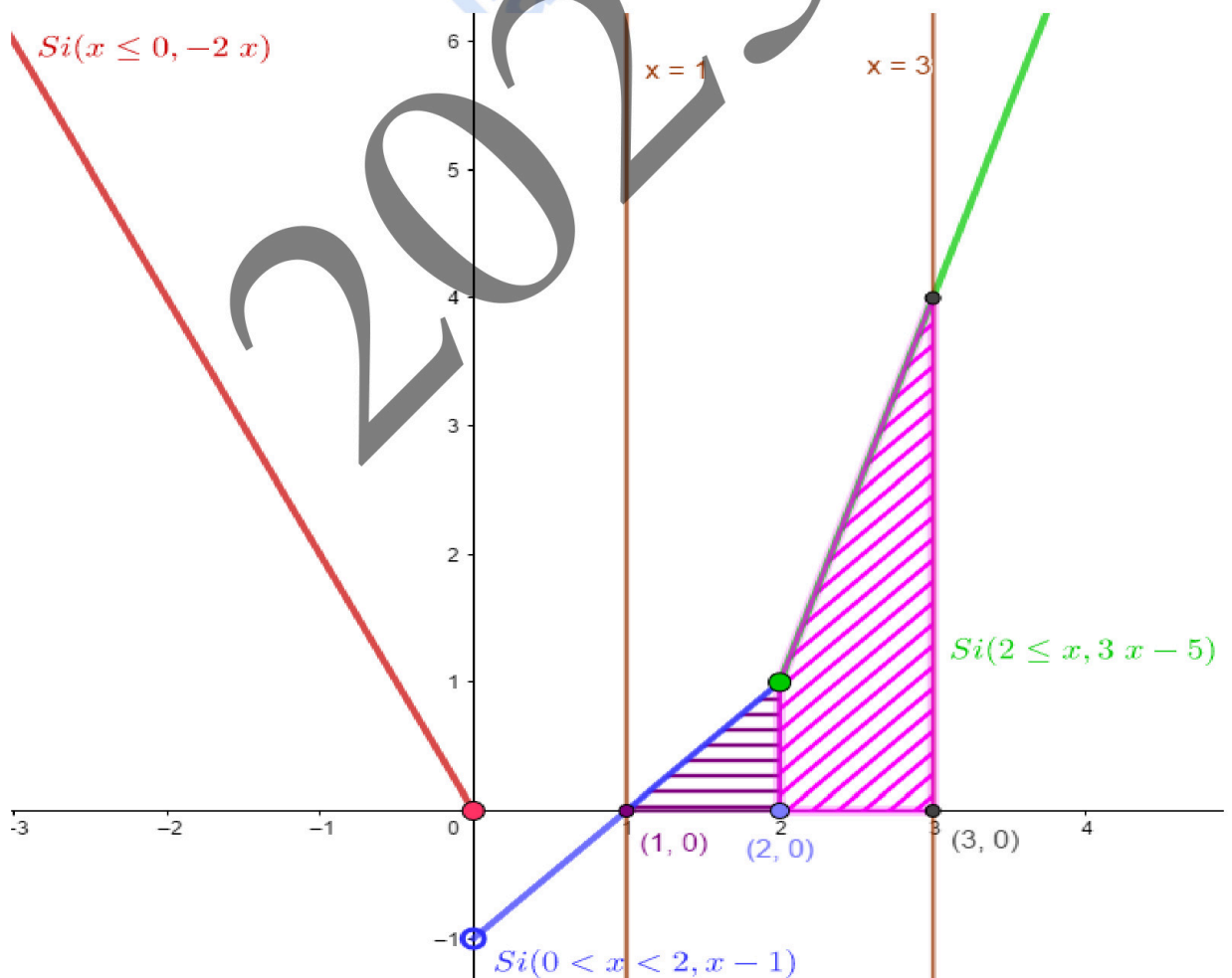


- c) Calculamos el área limitada por $f(x)$, el eje de abscisas OX , y las rectas $x = 1$ y $x = 3$, cuando $a = 0$ y $b = 3$.

$$A = A_1 + A_2 = \int_1^2 [(x-1) - 0] dx + \int_2^3 [(3x-5) - 0] dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 + \left[\frac{3x^2}{2} - 5x \right]_2^3 = 0 - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{3^3}{2} - 15 \right) - \left(\frac{12}{2} - 10 \right) = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{27}{2} - 15 + 4 = 3u^2 \Rightarrow A = 3u^2$$

Nota: Este mismo resultado también podía haberse obtenido calculando geoméricamente el área a partir de la gráfica de la figura.

$$A = \left(\frac{1 \cdot 1}{2} \right) + (1 \cdot 1) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2} \right) = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 3u^2$$





BLOQUE: PROBABILIDAD

A.3. Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse, a través de un diagrama de árbol o una tabla de contingencia.

	GANAR	NO GANAR	
SER TITULAR	0,32	0,48	0,8
NO SER TITULAR	0,09	0,11	0,2
	0,41	0,59	1

a) Probabilidad de que el equipo gane un partido.

$$P(\text{GANAR}) = 0,41 \Rightarrow 41 \%$$

b) Probabilidad de que Gorka haya sido titular, sabiendo que su equipo ha ganado.

$$P(\text{SER TITULAR} \mid \text{GANAR}) = \frac{0,32}{0,41} = 0,7804 \Rightarrow 78,04 \%$$

c) Probabilidad de que Gorka no sea titular y que su equipo gane.

$$P(\text{NO SER TITULAR} \cap \text{GANAR}) = 0,09 \Rightarrow 9 \%$$

d) ¿Los sucesos “ser titular” y “ganar el partido” son sucesos independientes?

“SER TITULAR” y “GANAR” son sucesos independientes \Leftrightarrow

$$\begin{cases} P(\text{SER TITULAR} \mid \text{GANAR}) = P(\text{SER TITULAR}) \\ P(\text{GANAR} \mid \text{SER TITULAR}) = P(\text{GANAR}) \end{cases}$$

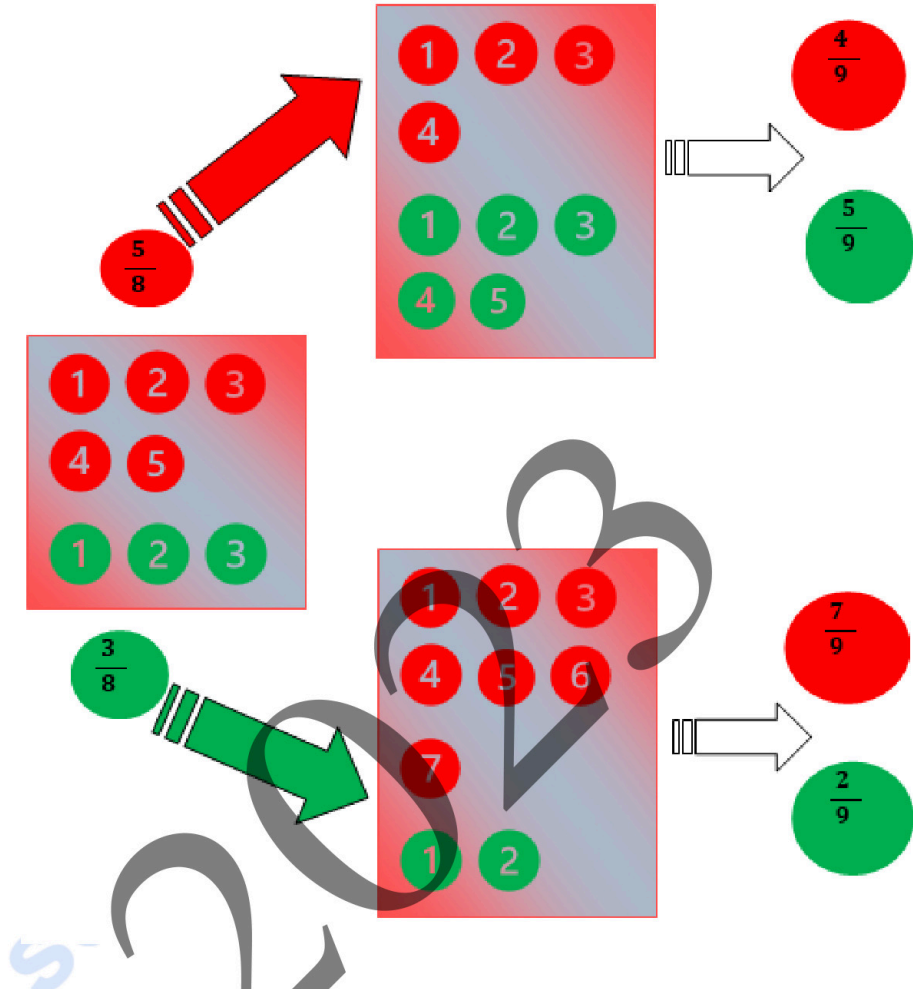
$$\neq P(\text{SER TITULAR} \mid \text{GANAR}) = 0,7804$$

$$\neq P(\text{SER TITULAR}) = 0,8$$

$$\Rightarrow P(\text{SER TITULAR} \mid \text{GANAR}) \neq P(\text{SER TITULAR})$$

Por lo tanto, “SER TITULAR” y “GANAR” **no son sucesos independientes; son dependientes.**

B.3. Ejercicio sobre cálculo de probabilidades. Probabilidad Total y a posteriori. Teorema de Bayes.



a) Probabilidad de que la segunda bola extraída sea verde.

$$\begin{aligned}
 P(\text{segunda bola verde}) &= P(V_2) = P(R_1) P(V_2 | R_1) + P(V_1) P(V_2 | V_1) = \\
 &= \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{9} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{9} = \frac{31}{72} = 0,43055 \Rightarrow \\
 P(\text{segunda bola verde}) &= \mathbf{0,43055 \Rightarrow 43,055 \%}
 \end{aligned}$$

b) Probabilidad de que la primera bola haya sido roja, sabiendo que la segunda bola también ha sido roja.

$$\begin{aligned}
 P(R_1 | R_2) &= \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{P(R_1) P(R_2 | R_1)}{P(R_1) P(R_2 | R_1) + P(V_1) P(R_2 | V_1)} = \frac{\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{9}}{\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{8} \cdot \frac{7}{9}} = \frac{20}{41} \\
 &\Rightarrow P(\text{primera bola roja sabiendo que la segunda ha sido roja}) = \mathbf{0,4878} \\
 &\Rightarrow \mathbf{48,78 \%}
 \end{aligned}$$



BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

A.4. Cálculo del intervalo de confianza de la media para una población con distribución normal. Tamaño y error máximo admisible de la muestra.

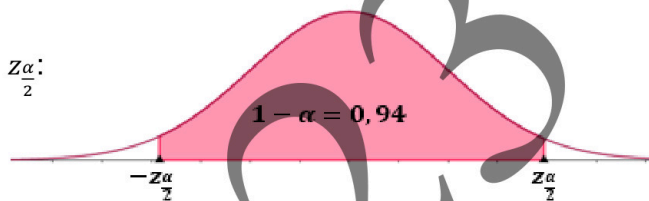
El peso neto de una tableta de chocolate: $X \equiv \mathcal{N}(\mu, 7)$

a) Calcula el intervalo de confianza para la media μ , con un nivel de confianza del 94 %.

El valor de la media muestral es;

$$\bar{x} = \frac{5.274}{36} = 146,5 \Rightarrow \bar{x} = 146,5$$

Calculamos $\frac{z_{\alpha}}{2}$:



Nivel de confianza: $n_c = 0,94 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,06 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,03 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,885$

$P(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0,03 \Rightarrow 1 - P(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0,03 \Rightarrow P(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0,97 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,885$

El intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\Rightarrow \left(146,5 - 1,885 \frac{7}{\sqrt{36}}, 146,5 + 1,885 \frac{7}{\sqrt{36}} \right) = (144,3, 148,69)$$

b) Calcular el tamaño de la muestra para que la amplitud del intervalo que se obtenga sea, como máximo, de 3 gramos.

El intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = (\bar{x} - e, \bar{x} + e) \Rightarrow \bar{x} + e - (\bar{x} - e) = 3 \Rightarrow 2e = 3 \Rightarrow e = 1,5$$

Es decir, el error máximo admisible es la mitad de la amplitud del intervalo.

Aplicando la fórmula del error para la media calculamos el tamaño de la muestra;

$$e = 1,5 = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,885 \cdot \frac{7}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 1,885 \frac{7}{1,5} = 8,7967 \Rightarrow n = 77,38 \Rightarrow n = 78$$



B.4. Distribución binomial; media y desviación típica. Cálculo de probabilidades y aproximación de distribución normal para la distribución binomial. Corrección de Yates.

✚ **El jugador A:** número de caras del jugador A: $X \equiv B(n, p)$

- n = número de lanzamientos con la moneda equilibrada
- p = probabilidad de sacar cara = $\frac{1}{2} = 0,5 \Rightarrow q = 0,5$

✚ **El jugador B:** número de cruces del jugador B: $Y \equiv B(n', p')$

- n' = número de lanzamientos con la moneda trucada
- p' = probabilidad de sacar cruz = $0,6 \Rightarrow q' = 0,4$

a) Calculamos la probabilidad de que el jugador A obtenga 3 caras en 3 lanzamientos con su moneda equilibrada.

X : número de caras del jugador A $\equiv B(n, 0,5)$ y $n = 3 \Rightarrow X \equiv B(3, 0,5)$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} \Rightarrow P(X = 3) = \binom{3}{3} \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^0 = 0,125 \Rightarrow \% 12,5$$

OTRA FORMA

$$P(X = 3) = P(\text{Cara} \cap \text{Cara} \cap \text{Cara}) = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,125$$

b) Calculamos la probabilidad de que el jugador B obtenga 2 cruces en 2 lanzamientos con su moneda trucada.

Y : número de cruces del jugador B $\equiv B(n', 0,6)$ y $n' = 2 \Rightarrow Y \equiv B(2, 0,6)$

$$P(Y = k) = \binom{n'}{k} (p')^k \cdot (q')^{n'-k} \Rightarrow P(Y = 2) = \binom{2}{2} \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^0 = 0,36 \Rightarrow \% 36$$

OTRA FORMA

$$P(Y = 2) = P(\text{Cruz} \cap \text{Cruz}) = 0,6 \cdot 0,6 = 0,36$$

c) Calculamos la probabilidad de que el jugador A obtenga menos de 190 caras en 400 lanzamientos con su moneda equilibrada, y de que el jugador B obtenga menos de 110 cruces en 200 lanzamientos con su moneda cargada.

El jugador A:

✚ X : número de caras del jugador A $\equiv B(n, p) = B(400, 0,5)$

✚ Aproximación de la distribución normal para la distribución binomial:

$$X \equiv B(400, 0,5) \Rightarrow X' \sim N(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot q}) = N(400 \cdot 0,5, \sqrt{400 \cdot 0,5 \cdot 0,5}) \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} n \cdot p = 400 \cdot 0,5 = 200 > 5 \\ n \cdot q = 400 \cdot 0,5 = 200 > 5 \end{array} \right\} \Rightarrow X' \sim N(200, 10)$$

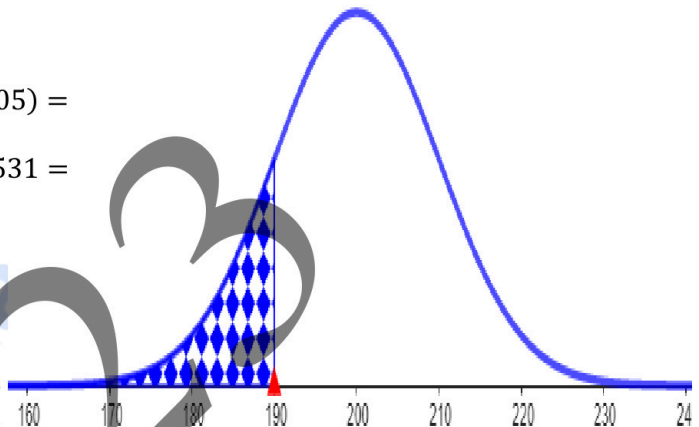
Entonces:

$$P(X < 190) = P(X' < 190 - 0,5) = P(X' < 189,5) = P\left(\frac{X' - 200}{10} < \frac{189,5 - 200}{10}\right) =$$

CORRECCIÓN DE YATES

$$\begin{aligned} &= P(Z < -1,05) = P(Z > 1,05) = \\ &= 1 - P(Z \leq 1,05) = 1 - 0,8531 = \\ &= 0,1469 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$P(X < 190) = \% 14,69$$



El jugador B:

✚ Y : número de cruces del jugador B $\equiv B(n, p) = B(200, 0,6)$

✚ Aproximación de la distribución normal para la distribución binomial:

$$Y \equiv B(200, 0,6) \Rightarrow Y' \sim N(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot q}) = N(200 \cdot 0,6, \sqrt{200 \cdot 0,6 \cdot 0,4})$$

$$\left. \begin{array}{l} n \cdot p = 200 \cdot 0,6 = 120 > 5 \\ n \cdot q = 200 \cdot 0,4 = 80 > 5 \end{array} \right\} \Rightarrow Y' \sim N(120, 6,9282)$$

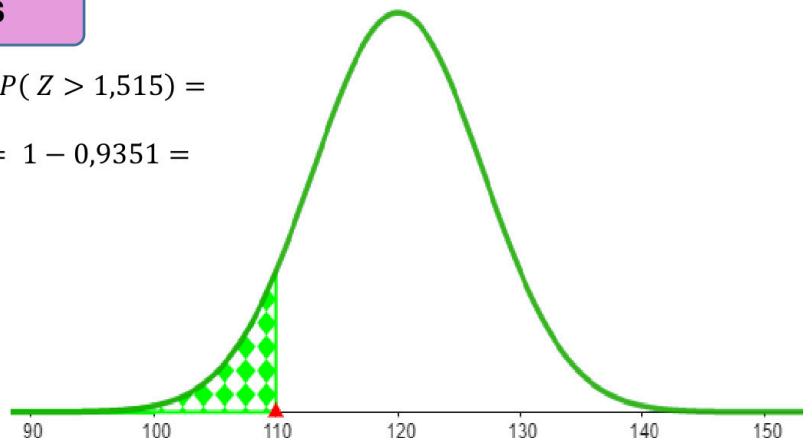
Entonces:

$$P(Y < 110) = P(Y' < 110 - 0,5) = P(Y' < 109,5) = P\left(\frac{Y' - 120}{6,9282} < \frac{109,5 - 120}{6,9282}\right) =$$

CORRECCIÓN DE YATES

$$\begin{aligned} &= P(Z < -1,515) = P(Z > 1,515) = \\ &= 1 - P(Z \leq 1,515) = 1 - 0,9351 = \\ &= 0,0649 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$P(Y < 100) = \% 6,49$$





ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

Por lo tanto, **es más probable que el jugador A** consiga menos de 190 caras en 400 lanzamientos con su moneda equilibrada, que el jugador B consiga menos de 110 cruces en 200 lanzamientos con su moneda trucada: $(0,1469 > 0,0649)$.

selectividad.academy
2023



GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK

1. Azterketa zortzi ariketaz osatuta dago.
2. *Zortzi problema horietatik lauri erantzun behar zaie, eta lau horiek gutxienez hiru bloke desberdinetakoak izan behar dute.*
3. Galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak egin diren ordenaren arabera zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.
4. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
5. Ariketa bakoitza 0 eta 2,5 puntu artean baloratuko da.
6. Galdera batean erabili beharreko ebazpen-metodoa zehazten ez bada, galdera hori modu egokian ebazten duen edozein bide onartuko da.

BALORAZIO POSITIBOA MEREZI DUTEN FAKTOREAK

- Planteamendu zuzenak, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik baldin badago).
- Kontzeptuak, hiztegia eta notazio zientifikoa zuzen erabiltzea.
- Zenbakizko datuak eta datu grafikoak interpretatzeko edo/eta kalkulatzeko erabiltzen diren teknika espezifikoak ezagutzea.
- Problema osorik bukatzea eta emaitzaren zehaztasuna.
- Bi emaitza zenbakizko kalkuletan erabilitako zehaztasun-mailan soilik desberdintzen badira, biak ontzat emango dira.
- Zenbakizko akatsak, kalkuletan egindakoak, etab., ez dira kontuan hartuko baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
- Ariketa ebaztean egindako pausoen azalpen argia.
- Ariketa eta haren soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, grafikoak, aurkezpenak, eskemak, ...
- Aurkezpenaren txukuntasuna, bai eta unibertsitatera sartzeaz dagoen ikasle batek beharko lukeen heldutasuna erakusten duen beste edozein alderdi.



BALORAZIO NEGATIBOA MEREZI DUTEN FAKTOREAK

- Planteamendu okerrak.
- Kontzeptuen nahasketa.
- Kalkulu-akatsen ugaritasuna (oinarrizko gabezien adierazle delako).
- Akats bakanak, hausnarketa kritikoa edo sen ona falta dela erakusten dutenean (adibidez, problema baten soluzioa $-3,7$ hozkailu dela esatea, edo probabilitate baten balioa $2,5$ dela esatea).
- Akats bakanak, haien ondorioz ebatzitako problema hasieran proposatutakoa baino errazagoa bilakatzen denean.
- Azalpenik eza, bereziki erabiltzen ari diren aldagaien esanahia.
- Akats ortografiko larriak, desordena, garbitasun falta, idazkera okerra, eta unibertsitatera sartzeaz dagoen ikasle batek izan beharke ez lukeen edozein ezaugarri desegoki.



ARIKETA BAKOITZARI DAGOZKION IRIZPIDE BEREZIAK

BLOKEA: ALJEBRA

A.1. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

a. 0,75 puntu

- 1. modua
 - Alderantzizko matrizearen definizioa, 0,25 puntu.
 - $B \cdot A$ matrizea kalkulatzeko, 0,25 puntu.
 - $A \cdot B$ matrizea kalkulatzeko, 0,25 puntu.
- 2. modua
 - A matrizearen determinantea, 0,15 puntu.
 - Adjuntuak, 0,5 puntu.
 - A matrizearen alderantzizkoa kalkulatzeko, 0,1 puntu.

b. 0,75 puntu

- $A - 2 I_2$ matrizea kalkulatzeko, 0,25 puntu.
- $(A - 2 I_2)^2$ matrizea kalkulatzeko, 0,5 puntu.

c. 1 puntu

- X matrizea zehaztatzeko adierazpena lortzeko, 0,25 puntu.
 - 1. modua
 - B^2 matrizea kalkulatzeko, 0,75 puntu.
 - 2. modua
 - A^{-1} matrizea kalkulatzeko, 0,5 puntu.
 - $A^{-1} \cdot B$ matrizea kalkulatzeko, 0,25 puntu.



B.1. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

a. 2,2 puntu

- Helburu funtzioa zehaztea, **0,1 puntu.**
- Murrizketak zehaztea, **0,3 puntu.**
- Bideragarritasun-eskualdea irudikatzea eta zehaztea,
 - Murrizketa bakoitzaren irudikapena 0,1 puntu, beraz **0,3 puntu.**
 - Bideragarritasun-eskualdea zehaztea, **0,3 puntu.**
- Bideragarritasun-eskualdeko erpinak zehaztea, **0,2 puntu.**
- Erpinetan funtzioa baloratzea, **0,3 puntu.**
- Jimenaren baieztapenari erantzutea, ondo arrazoituz, **0,3 puntu.**
- Ivánen baieztapenari erantzutea ondo arrazoituz, **0,4 puntu.**

b. 0,3 puntu

- Minimoaren balio zehaztea, **0,3 puntu.**

selectividad.academy
2023



BLOKEA: ANALISIA

A.2. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

- a. 0,4 puntu
- $f(x)$ funtzioaren adierazpen grafikoa, 0,4 puntu.
- b. 0,3 puntu
- Erantzun arrazoitua, 0,3 puntu.
- c. 0,3 puntu
- Erantzun arrazoitua, 0,3 puntu.
- d. 0,5 puntu
- Erantzun arrazoitua, 0,5 puntu.
- e. 0,3 puntu
- Erantzun arrazoitua, 0,3 puntu.
- f. 0,7 puntu
- Erantzun arrazoitua, 0,3 puntu.
 - Funtzioaren ezaugarri batekin lotzea, 0,4 puntu.



B.2. ariketa (*gehienez 2,5 puntu*)

a. 1,2 puntu

- Jarraitutasuna $(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, \infty)$ tartean, **0,3 puntu.**
- Funtzio baten jarraitutasuna puntu batean definitzea, **0,1 puntu.**
 - $x = 0$ puntuan.
 - ✚ Alboko limiteak kalkulatzeko, **0,2 puntu.**
 - ✚ $f(0)$ balioa zehaztea, **0,1 puntu.**
 - ✚ a parametroaren balioa zehaztea, **0,1 puntu.**
 - $x = 2$ puntuan.
 - ✚ Alboko limiteak kalkulatzeko, **0,2 puntu.**
 - ✚ $f(2)$ balioa zehaztea, **0,1 puntu.**
 - ✚ b parametroaren balioa zehaztea, **0,1 puntu.**

b. 0,5 puntu

- Funtzioaren adierazpen grafikoa, **0,5 puntu.**

c. 0,8 puntu

- $A_1 + A_2$ integral mugatuen zehaztapena, **0,2 puntu.**
- Integral mugatuak kalkulatzeko:
 - A_1 integral mugatua kalkulatzeko, **0,3 puntu.**
 - A_2 integral mugatua kalkulatzeko, **0,3 puntu.**



BLOKEA: PROBABILITATEA

A.3. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

a. 0,8 puntu

- Zuhaitz diagrama edo kontingentzia taula egitea, **0,3 puntu.**
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,5 puntu.**

b. 0,6 puntu

- Adieraztea zer kalkulatu behar den, **0,1 puntu.**
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,5 puntu.**

c. 0,6 puntu

- Adieraztea zer kalkulatu behar den, **0,1 puntu.**
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,5 puntu.**

d. 0,5 puntu

- Adieraztea bi gertaera askeak izateak zer esan nahi duen, **0,1 puntu.**
- Kalkuluak, **0,2 puntu.**
- Ondorioztatzea nolakoak diren gertaerak, **0,2 puntu.**

B.3. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

a. 1,4 puntu

- Zuhaitz diagrama edo eskema baten bat egitea, **0,3 puntu.**
- Gertaeraren probabilitate osoa adieraztea edo bere formula, **0,4 puntu.**
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,7 puntu.**

b. 1,1 puntu

- A posteriori probabilitatearen formula adieraztea, Bayes-en teorema, , **0,4 puntu.**
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,7 puntu.**



BLOKEA: INFERENTZIA ESTADISTIKOA

A.4. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

a. 1,7 puntu.

- Laginaren batezbestekoa zehaztea, **0,4 puntu.**
- Batezbestekorako konfiantza-tartearen formula zehaztea, **0,3 puntu.**
- $\frac{z_{\alpha}}{2}$ zehaztea, **0,5 puntu.**
- Eskatutako konfiantza-tartea, **0,5 puntu.**

b. 0,8 puntu.

- Errorearen zer den adieraztea, **0,2 puntu.**
- Errorearen formula adieraztea, **0,2 puntu.**
- Laginaren tamaina kalkulatzeko, **0,4 puntu.**

B.4. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

a. 0,6 puntu

- Banaketa zehaztea **0,2 puntu.**
- $P(X = 3)$ probabilitatea kalkulatzeko, **0,4 puntu.**

b. 0,6 puntu

- Banaketa zehaztea **0,2 puntu.**
- $P(Y = 2)$ probabilitatea kalkulatzeko, **0,4 puntu.**

c. 1,3 puntu

- **A jokalaria.**
 - Banaketa normalaren zuzenketa Yates hurbilketa bidez **0,15 puntu.**
 - Eskatutako probabilitatearen kalkulua **0,5 puntu.**
- **B jokalaria.**
 - Banaketa normalaren zuzenketa Yates hurbilketa bidez **0,15 puntu.**
 - Eskatutako probabilitatearen kalkulua **0,5 puntu.**



EBAZPENAK

BLOKEA: ALJEBRA

A.1. Kalkulu matriziala. Alderantzizko matrizearen kalkulua. Ekuazio matriziala.

a) Egiaztatuko dugu $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ matrizea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ matrizearen alderantzizkoa dela:

$$\oplus B = A^{-1} \Leftrightarrow B \cdot A = I_2 \quad \wedge \quad A \cdot B = I_2$$

$$\circ B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$\circ A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Beraz, $B = A^{-1}$

BESTE MODU BAT

$\oplus A^{-1}$ kalkulatu dugu:

$$\circ |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

\circ Adjuntuak:

$$\blacksquare A_{11} = (-1)^2 \cdot 2 = 2$$

$$\blacksquare A_{21} = (-1)^3 \cdot 1 = -1$$

$$\blacksquare A_{12} = (-1)^3 \cdot 3 = -3$$

$$\blacksquare A_{22} = (-1)^4 \cdot 2 = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj } A)^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = B \Rightarrow B = A^{-1}$$

b) $(A - 2I_2)^2$ matrizea kalkulatu dugu:

$$(A - 2I)^2 = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I_2$$

$$\Rightarrow (A - 2I_2)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I_2$$



c) X matrizea kalkulatu dugu, non $A \cdot X = B$ den:

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = B \cdot B = B^2 \Rightarrow X = B^2$$

a) atala $A^{-1} = B$

$$X = B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$$

selectividad.academy
2023

B.1 Bi aldagaiko programazio linealeko problema ebaztea.

✚ Helburu funtzioa hau da:

$$F(x, y) = 6x + 3y - 2$$

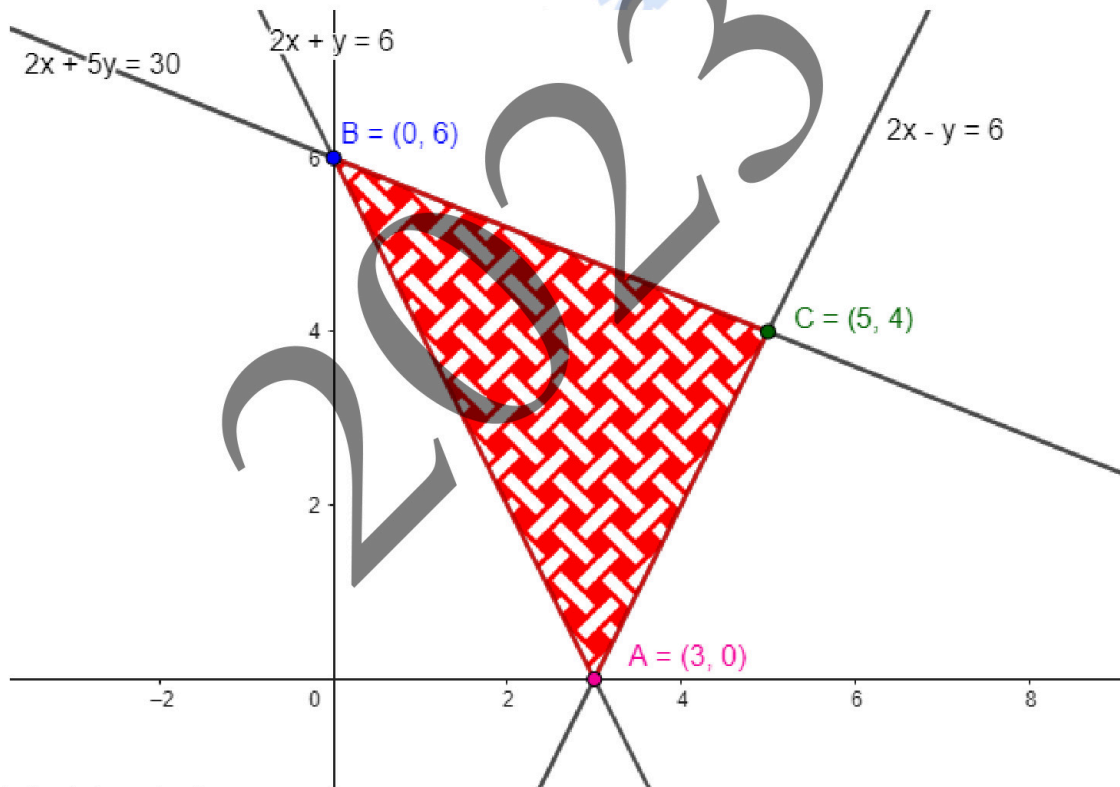
✚ Murrizketak honako hauek dira:

$$2x + y \geq 6$$

$$2x + 5y \leq 30$$

$$2x - y \leq 6$$

✚ Soluzio bideragarrien esparrua XY planoan:



✚ Erpinak hauek dira:

$$A(3, 0); B(0, 6); C(5, 4)$$

✚ Erpin horietan helburu funtzioak $F(x, y) = 6x + 3y - 2$ hartzen dituen balioak kalkulatu ditugu:

$$F(A) = F(3, 0) = 16$$

$$F(B) = F(0, 6) = 16$$

$$F(C) = F(5, 4) = 40$$



**ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN**

- a) Jimenak erantzun du (1, 2) puntuan lortzen dela, eta Ivánek, berriz, (3, 0) puntuan.
- Egia al da funtzioaren minimoa (1, 2) puntuan lortzen dela?
Ez. (1, 2) puntua ez dago soluzio bideragarrien esparruan, ez duelako baldintzaren baten bat betetzen, beraz, ezinezkoa da funtzioak puntu horretan minimoa lortzea.
 - Zehatza al da Ivánen erantzuna?
Ez, minimoa $A(3, 0)$ puntuan ez ezik \overline{AB} zuzenkiko puntu guztietan ere lortzen delako. Beraz, erantzuna, faltsua izan ez arren, ez da zehatza.
- b) Zenbat balio du minimo horrek?
Minimoaren balioa 16 da.

selectividad.academy
2023



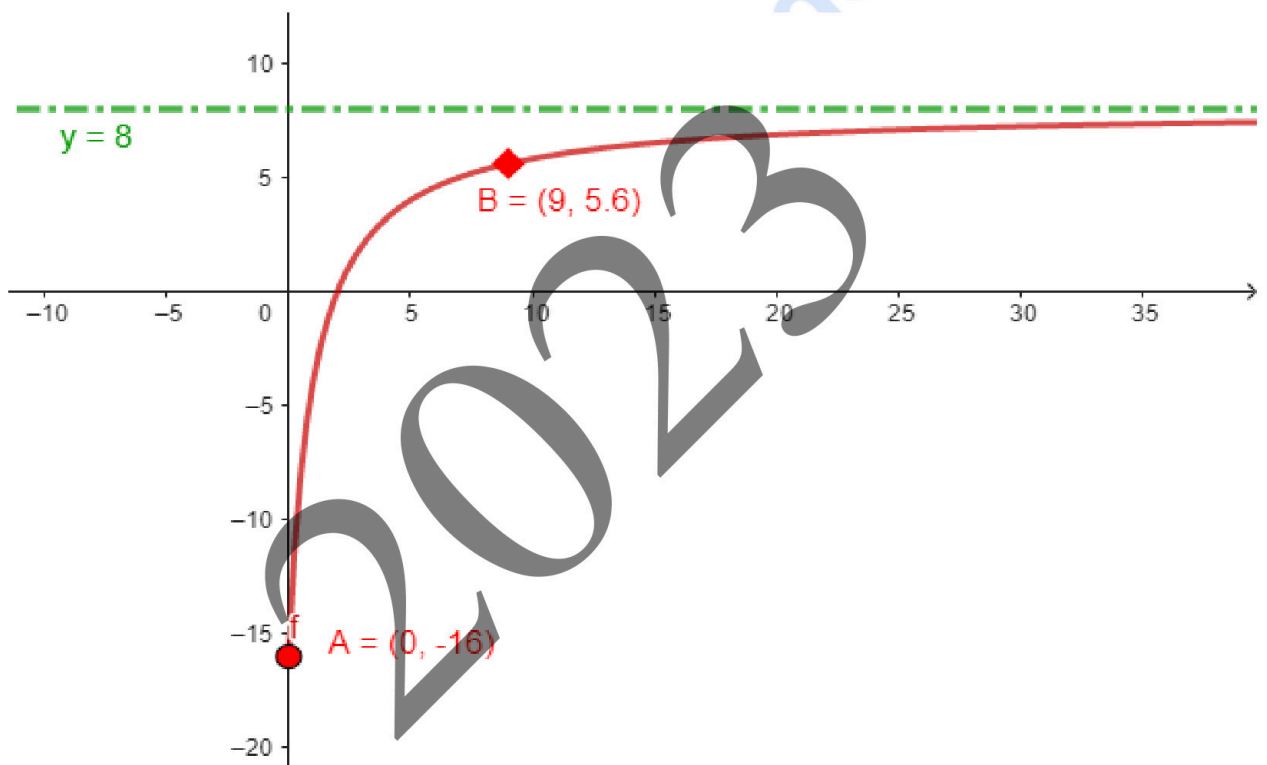
BLOKEA: ANALISIA

A.2 Funtzio baten analisia. Funtzioaren maximo eta minimo erlatiboak kalkulatzeko, eta adierazpen grafikoa. Funtzioaren ezaugarriak.

$$I(t) = \frac{8t - 16}{t + 1}, \quad t \geq 0$$

non t igarotako denbora (urtetan), eta $I(t)$ irabaziak/galerak (milako eurotan) diren.

a) Funtzioaren adierazpen grafikoa.



b) Zein izan zen hasierako inbertsioa?

Hasierako inbertsioa (hasierako kapitala) $t = 0$ denean $I(t)$ -ri dagokion balioa da.

$\Rightarrow I(0) = -16 \Rightarrow$ hasierako inbertsioa **16.000 € izan zen.**

A puntuari dagokio grafikoa.

c) Zein urtetan irabazi du 5.600 €?

5.600 € $I(t) = 5,6$ balioari dagokio, mila eurokotan neurtzen delako.

$$I(t) = 5,6 = \frac{8t - 16}{t + 1} \Rightarrow 5,6t + 5,6 = 8t - 16 \Rightarrow 21,6 = 2,4t \Rightarrow t = 9$$

Beraz, **9.urtean.**

B puntuari dagokio grafikoa.



d) Zein urtetatik aurrera hasten da enpresa irabaziak lortzen?

$$I(t) = \frac{8t - 16}{t + 1} \geq 0 \Rightarrow 8t - 16 \geq 0 \Rightarrow t \geq 2$$

Bigarren urtetik aurrera ($t \geq 2$).

BESTE MODU BAT

$$\begin{cases} I(t) = \frac{8t - 16}{t + 1} \\ I(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{8t - 16}{t + 1} = 0 \Rightarrow 8t - 16 = 0 \Rightarrow t = 2$$

eta $I(t)$ gorakorra da (bere definizio- eremuan) \Rightarrow enpresa bigarren urtetik aurrera hasi zen irabaziak lortzen.

e) Funtzioaren joera (funtzioaren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak).

Joera beti da positiboa, funtzioa gorakorra delako bere definizio-eremuan: $[0, \infty)$.

f) Horrela jarraituz gero, zein da irabazien/galeren bilakaeraren joera?

Funtzioaren ezaugarriren batekin lotzen duzu?

Urteak igaro ahala, irabaziek/galerek izango duten bilakaeraren joera aztertzeko, $I(t)$ funtzioaren limitea kalkulatu dugu, $t \rightarrow \infty$ -ra doanean. Hau da:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8t - 16}{t + 1} = 8$$

Beraz, **irabaziak/galerak 8.000 €-ko irabazien inguruan egonkortuko dira.**

$I(t) = 8$ **zuzena** funtzioaren **asintota horizontal bat da**; eta hori da urteak igaro ahala funtzioak duen joera.



B.2. Funtzio baten jarraitasuna aztertzea. Adierazpen grafikoa.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - a & \text{baldin eta } x \leq 0 & \text{bada} \\ x - 1 & \text{baldin eta } 0 < x < 2 & \text{bada} \\ bx - 5 & \text{baldin eta } x \geq 2 & \text{bada} \end{cases}$$

a) a eta b parametroen balioak zehaztuko ditugu $f(x)$ funtzioa \mathbb{R} -n jarraitua izan dadin.

- $\mathbb{R} - \{0, 2\} = (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, \infty)$ tarteen puntu guztietan jarraitua da $f(x)$, funtzioaren definizioagatik, polinomioak baitira.
- $x = 0$ puntuan.

$$f(x) \text{ jarraitua da } x = x_0 \text{ puntuan} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2x - a) = -a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1) = -1$$

$$f(0) = -a$$

$$\Rightarrow a = 1$$

- $x = 2$ puntuan.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 1) = 1$$

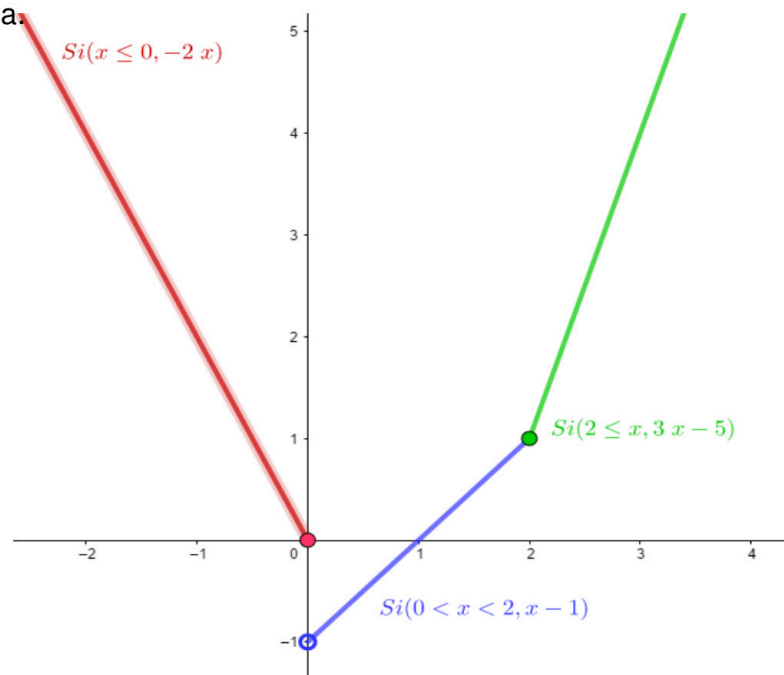
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (bx - 5) = 2b - 5$$

$$f(2) = 2b - 5$$

$$\Rightarrow 2b - 5 = 1 \Rightarrow b = 3$$

b) Funtzioaren adierazpen grafikoa.

$$f(x) = \begin{cases} -2x & x \leq 0 \\ x - 1 & 0 < x < 2 \\ 3x - 5 & x \geq 2 \end{cases}$$





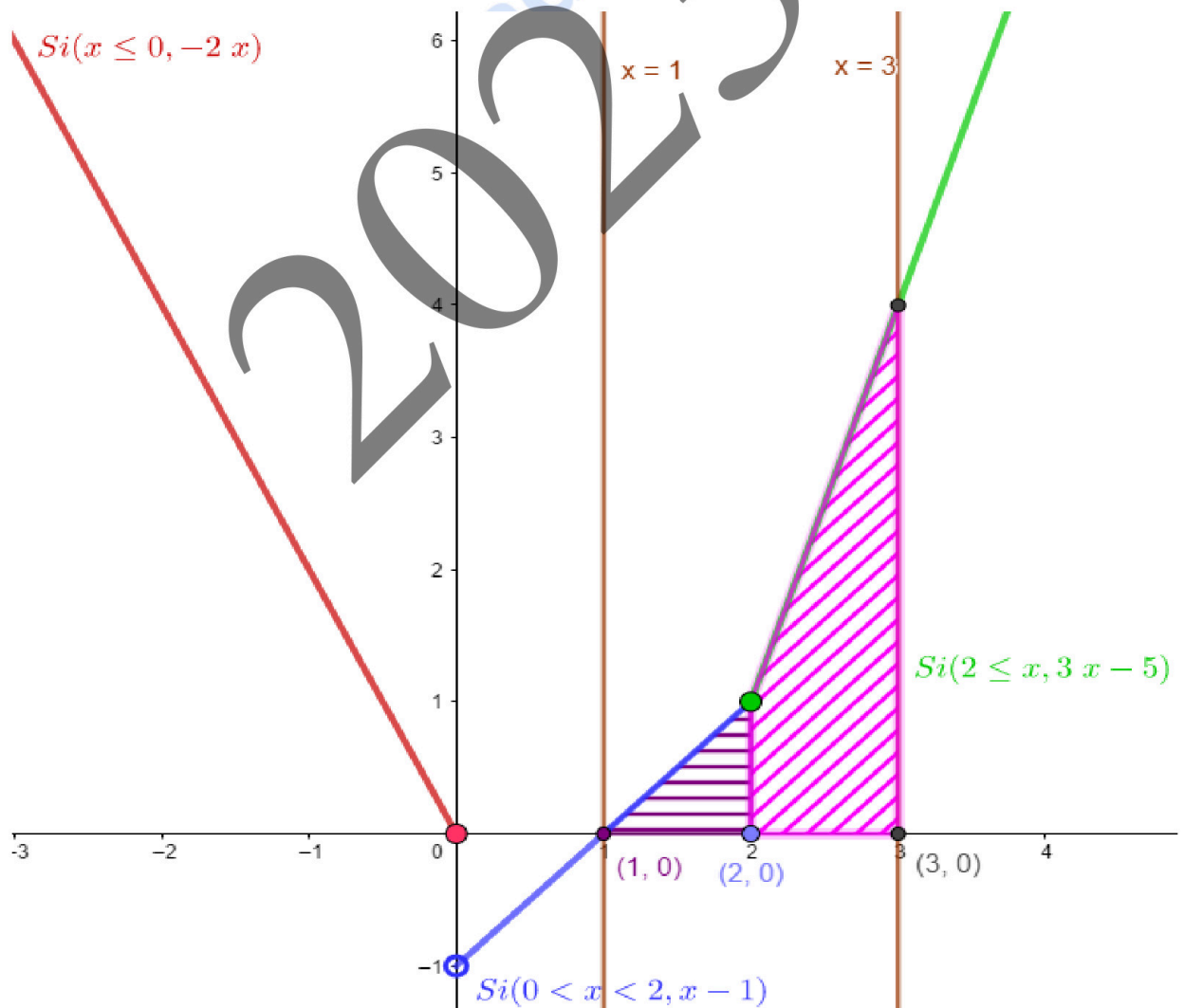
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

- c) $a = 0$ eta $b = 3$ kasuan, funtzioaren grafikoak, OX abzisa-ardatzak eta $x = 1$ eta $x = 3$ zuzenek mugatutako eskualdearen azalera kalkulatu dugu.

$$A = A_1 + A_2 = \int_1^2 [(x-1) - 0] dx + \int_2^3 [(3x-5) - 0] dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 + \left[\frac{3x^2}{2} - 5x \right]_2^3 =$$
$$= 0 - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{3^3}{2} - 15 \right) - \left(\frac{12}{2} - 10 \right) = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{27}{2} - 15 + 4 = 3u^2 \Rightarrow A = 3u^2$$

Oharra: Emaitza hori bera ere lor zitekeen azalera geometrikoki kalkulatu, irudiaren grafikotik abiatuta.

$$A = \left(\frac{1 \cdot 1}{2} \right) + (1 \cdot 1) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2} \right) = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 3u^2$$





BLOKEA: PROBABILITATEA

A.3 Probabilitate bat kalkulatzea, zuhaitz-diagramaren bidez edo probabilitate osoaren bidez.

	IRABAZI	EZ IRABAZI	
TITULAR IZAN	0,32	0,48	0,8
TITULAR EZ IZAN	0,09	0,11	0,2
	0,41	0,59	1

a) Taldeak partidu bat irabazteko probabilitatea:

$$P(\text{IRABAZI}) = 0,41 \Rightarrow \% 41$$

b) Taldeak irabazi duela jakinda, Gorke titular izanaren probabilitatea:

$$P(\text{TITULAR IZAN} \mid \text{IRABAZI}) = \frac{0,32}{0,41} = 0,7804 \Rightarrow \% 78,04$$

c) Gorke titular ez jokatzeko eta taldeak irabazteko probabilitatea:

$$P(\text{TITULAR EZ IZAN} \cap \text{IRABAZI}) = 0,09 \Rightarrow \% 9$$

d) "Titular izatea" eta "partida irabaztea" gertaerak askeak dira?

"TITULAR IZAN" eta "IRABAZI" askeak \Leftrightarrow

$$\begin{cases} P(\text{TITULAR IZAN} \mid \text{IRABAZI}) = P(\text{TITULAR IZAN}) \\ P(\text{IRABAZI} \mid \text{TITULAR IZAN}) = P(\text{IRABAZI}) \end{cases}$$

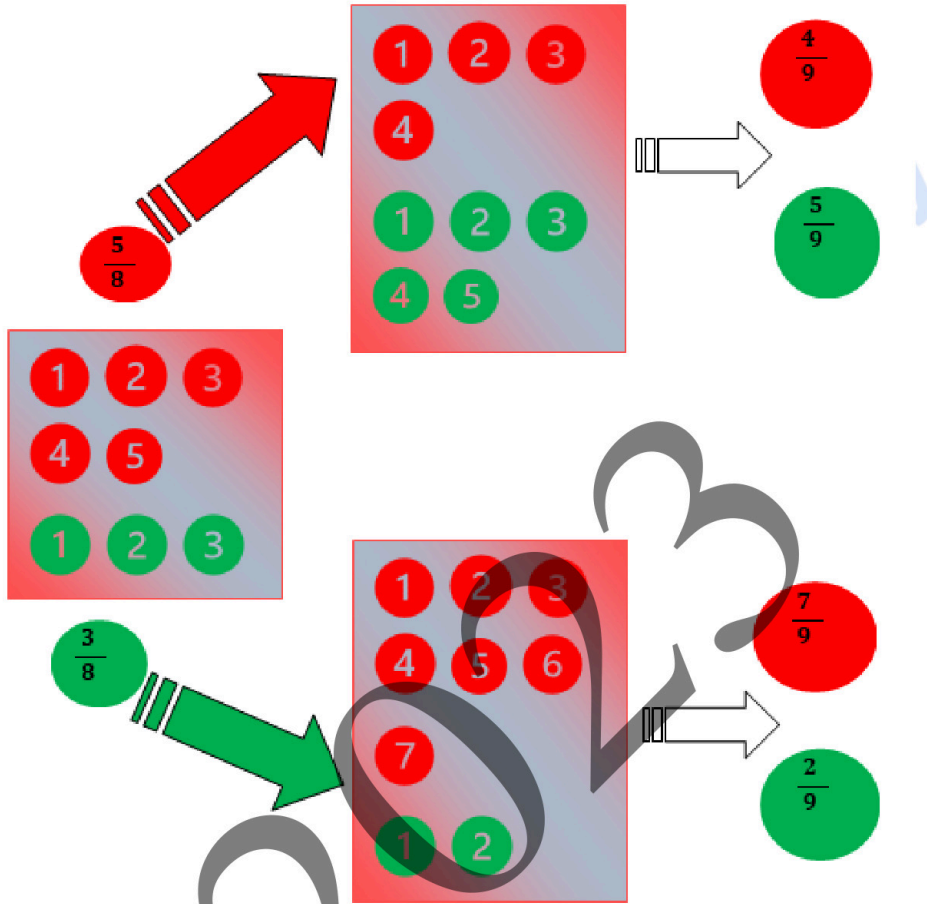
$$\color{red}{\oplus} P(\text{TITULAR IZAN} \mid \text{IRABAZI}) = 0,7804$$

$$\color{red}{\oplus} P(\text{TITULAR IZAN}) = 0,8$$

$$\Rightarrow P(\text{TITULAR IZAN} \mid \text{IRABAZI}) \neq P(\text{TITULAR IZAN})$$

Beraz, "TITULAR IZAN" eta "IRABAZI" gertaerak ez dira askeak: **menpekoak dira.**

B.3. Probabilitateen kalkuluei buruzko ariketa. Probabilitate osoa eta a posteriori. Bayesen teorema.



a) Bigarren bola berdea izateko probabilitatea.

$$P(\text{bigarren bola berdea}) = P(B_2) = P(G_1) \cdot P(B_2 | G_1) + P(B_1) \cdot P(B_2 | B_1) =$$

$$= \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{9} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{9} = \frac{31}{72} = 0,4305 \Rightarrow$$

$$P(\text{bigarren bola berdea}) = 0,43055 \Rightarrow \% 43,055$$

b) Lehenengo bola gorria izanaren probabilitatea, jakinda bigarren bola gorria izan dela.

$$P(G_1 | G_2) = \frac{P(G_1 \cap G_2)}{P(G_2)} = \frac{P(G_1) \cdot P(G_2 | G_1)}{P(G_1) \cdot P(G_2 | G_1) + P(B_1) \cdot P(G_2 | B_1)} = \frac{\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{9}}{\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{8} \cdot \frac{7}{9}} = \frac{20}{41}$$

$$\Rightarrow P(\text{lehenengo bola gorria jakinda bigarrena gorria izan dela}) = 0,4878$$

$$\Rightarrow \% 48,78$$

BLOKEA: INFERENTZIA ESTADISTIKOA

A.4. Banaketa normala duen populazio baten batezbestekorako konfiantza-tartearen kalkulatzeari. Laginaren tamaina eta errore maximo onargarria.

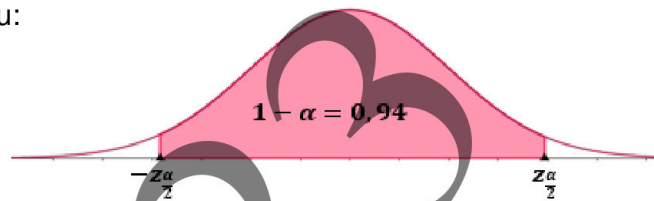
Marka jakin bateko txokolatezko tableten pisu garbia: $X \equiv \mathcal{N}(\mu, 7)$

a) Kalkulatuko dugu batezbestekorako konfiantza tarte, % 94ko konfiantza-mailaz:

Laginaren batezbestekoaren balioa hau da;

$$\bar{x} = \frac{5.274}{36} = 146,5 \Rightarrow \bar{x} = 146,5$$

✚ $z_{\frac{\alpha}{2}}$ kalkulatu dugu:



Konfiantza-maila: $n_c = 0,94 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,06 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,03 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,885$

$P(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0,03 \Rightarrow 1 - P(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0,03 \Rightarrow P(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0,97 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,885$

✚ Batezbestekorako konfiantza-tarte hau da :

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\Rightarrow \left(146,5 - 1,885 \frac{7}{\sqrt{36}}, 146,5 + 1,885 \frac{7}{\sqrt{36}} \right) = (144,3, 148,69)$$

b) Konfiantza-maila beraz, laginaren tamaina kalkulatu dugu lortzen den tartearen zabalera, gehienez, 3 gramo izan dadin.

✚ Batezbestekorako konfiantza-tarte hau da:

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = (\bar{x} - e, \bar{x} + e) \Rightarrow \bar{x} + e - (\bar{x} - e) = 3 \Rightarrow 2e = 3 \Rightarrow e = 1,5$$

Hau da, errore maximo onargarria tartearen zabalaren erdia da.

✚ Batezbestekorako errore maximo onargarriaren formulatik abiatuta, laginaren tamaina kalkulatu dugu:

$$e = 1,5 = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,885 \cdot \frac{7}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 1,885 \frac{7}{1,5} = 8,7967 \Rightarrow n = 77,38 \Rightarrow n = 78$$



B.4. Banaketa binomiala; batezbestekoa eta desbideratze tipikoa. Probabilitateen kalkulua eta banaketa normalaren hurbilketa banaketa binomialerako. Yates zuzenketa.

- ✚ **A jokalaria:** A jokalariaren aurpegi kopurua: $X \equiv B(n, p)$
- $n =$ txanpon orekatuarekin jaurtiketa kopurua
 - $p =$ aurpegia ateratzeko probabilitatea $= \frac{1}{2} = 0,5 \Rightarrow q = 0,5$
- ✚ **B jokalaria:** B jokalariaren gurutze kopurua: $Y \equiv B(n', p')$
- $n' =$ txanpon trukatuarekin jaurtiketa kopurua
 - $p' =$ gurutzea ateratzeko probabilitatea $= 0,6 \Rightarrow q' = 0,4$

a) Kalkulatuko dugu zer probabilitate dagoen A jokalariak bere txanpon orekatuarekin 3 jaurtiketatan 3 aurpegi lortzeko.

$X:$ A jokalariaren aurpegi kopurua $\equiv B(n, 0,5)$ eta $n = 3 \Rightarrow X \equiv B(3, 0,5)$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} \Rightarrow P(X = 3) = \binom{3}{3} \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^0 = 0,125 \Rightarrow \% 12,5$$

BESTE MODU BAT

$$P(X = 3) = P(\text{Aurpegia} \cap \text{Aurpegia} \cap \text{Aurpegia}) = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,125$$

b) Kalkulatuko dugu zer probabilitate dagoen B jokalariak bere txanpon trukatuarekin bi jaurtiketatan 2 gurutze lortzeko.

$Y:$ B jokalariaren gurutze kopurua $\equiv B(n', 0,6)$ eta $n' = 2 \Rightarrow Y \equiv B(2, 0,6)$

$$P(Y = k) = \binom{n'}{k} (p')^k \cdot (q')^{n'-k} \Rightarrow P(Y = 2) = \binom{2}{2} \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^0 = 0,36 \Rightarrow \% 36$$

BESTE MODU BAT

$$P(Y = 2) = P(\text{Gurutze} \cap \text{Gurutze}) = 0,6 \cdot 0,6 = 0,36$$

c) Kalkulatuko ditugu A jokalariak 400 jaurtiketatan 190 aurpegi baino gutxiago lortzeko probabilitatea eta B jokalariak 200 jaurtiketatan 110 gurutze baino gutxiago lortzekoa.

A jokalaria:

✚ $X:$ A jokalariaren aurpegi kopurua $\equiv B(n, p) = B(400, 0,5)$

✚ Banaketa normalaren hurbilketa banaketa binomialerako:

$$X \equiv B(400, 0,5) \Rightarrow X' \sim N(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot q}) = N(400 \cdot 0,5, \sqrt{400 \cdot 0,5 \cdot 0,5}) \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} n \cdot p = 400 \cdot 0,5 = 200 > 5 \\ n \cdot q = 400 \cdot 0,5 = 200 > 5 \end{array} \right\} \Rightarrow X' \sim N(200, 10)$$

Orduan:

$$P(X < 190) = P(X' < 190 - 0,5) = P(X' < 189,5) = P\left(\frac{X' - 200}{10} < \frac{189,5 - 200}{10}\right) =$$

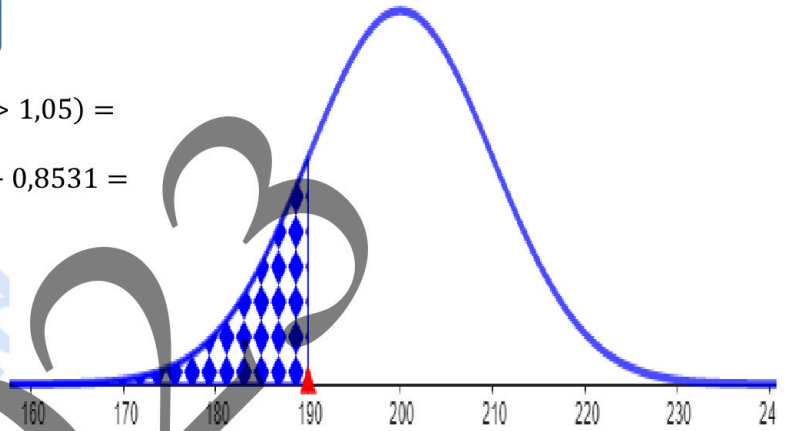
YATES ZUZENKETA

$$= P(Z < -1,05) = P(Z > 1,05) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1,05) = 1 - 0,8531 =$$

$$= 0,1469 \Rightarrow$$

$$P(X < 190) = \% 14,69$$



B jokalaria:

✚ $Y: B$ jokalariaren gurutze kopurua $\equiv B(n, p) = B(200, 0,6)$

✚ Banaketa normalaren hurbilketa banaketa binomialerako:

$$Y \equiv B(200, 0,6) \Rightarrow Y' \sim N(n' \cdot p', \sqrt{n' \cdot p' \cdot q'}) = N(200 \cdot 0,6, \sqrt{200 \cdot 0,6 \cdot 0,4})$$

$$\left. \begin{array}{l} n \cdot p = 200 \cdot 0,6 = 120 > 5 \\ n \cdot q = 200 \cdot 0,4 = 80 > 5 \end{array} \right\} \Rightarrow Y' \sim N(120, 6,9282)$$

Orduan:

$$P(Y < 110) = P(Y' < 110 - 0,5) = P(Y' < 109,5) = P\left(\frac{Y' - 120}{6,9282} < \frac{109,5 - 120}{6,9282}\right) =$$

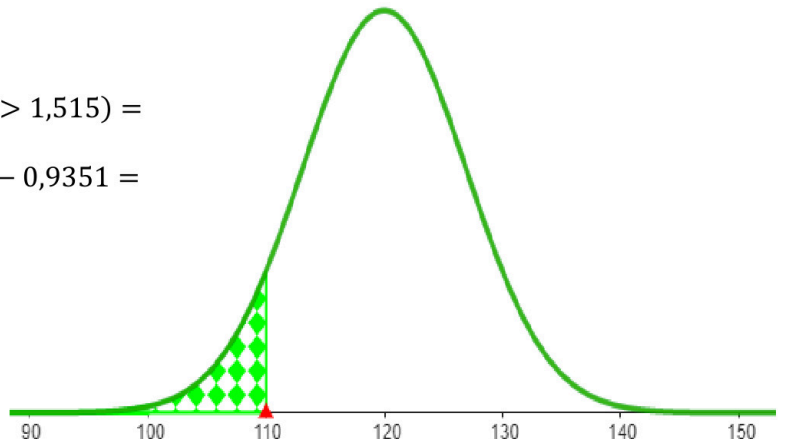
YATES ZUZENKETA

$$= P(Z < -1,515) = P(Z > 1,515) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1,515) = 1 - 0,9351 =$$

$$= 0,0649 \Rightarrow$$

$$P(Y < 100) = \% 6,49$$





ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

Beraz, **A jokariak** 400 jautiketatan bere txanpon orekatuarekin 190 aurpegi baino gutxiago lortzeko **probabilitate handiagoa** da B jokariak 200 jautiketatan bere txanpon trukatuarekin 110 gurutze baino gutxiago lortzekoa baino: **(0,1469 > 0,0649)**.

selectividad.academy
2023



Selectividad Academy

Tu academia de selectividad online

● Mejor academia online de selectividad

Prueba sin compromiso

Primera clase gratis. Sin permanencia. Sin letra pequeña.

- ✓ Profesores especialistas en cada asignatura
- ✓ Clases adaptadas a tu nivel y tus objetivos
- ✓ Todos los exámenes oficiales resueltos paso a paso
- ✓ Calculadora de nota y guía completa en la web

623 769 002

Escríbenos por WhatsApp

www.selectividad.academy

→ Calcula tu nota en selectividad.academy/calculadora-selectividad

→ Guía completa en selectividad.academy/guia-selectividad

→ ¿Tienes dudas? Escríbenos sin compromiso