Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Gizarte Zientziei Aplikatutako Matematika II
Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

EAU 2023 USE

www.ehu.eus

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

2023ko OHIKOA

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

ORDINARIA 2023

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

- ***Azterketa honek zortzi problema ditu lau bloketan banatuta. Zortzi problema horietatik lauri erantzun behar diezu, eta lau horiek gutxienez hiru bloke desberdinetakoak izan behar dute.***
- *Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.*

Kalkulagailu zientifikoak erabil daitezke, baina, **ezin ditu izan** ezaugarri hauek:

- pantaila grafikoa
- datuak igortzeko aukera
- programatzeko aukera
- ekuazioak ebazteko aukera
- matrize-eragiketak egiteko aukera
- determinanteen kalkulua egiteko aukera
- deribatuak eta integralak ebazteko aukera
- datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.

- ***Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques. De estos ocho problemas tienes que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.***
- *En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.*

Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica
- posibilidad de trasmitir datos
- programable
- resolución de ecuaciones
- operaciones con matrices
- cálculo de determinantes
- derivadas e integrales
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

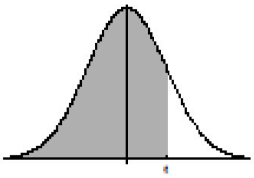
2023ko OHIKOA

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

ORDINARIA 2023

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

BLOKEA: ALJEBRA

A.1. $[\![\boldsymbol{gehienez\ 2,5\ puntu}]\!]$

Izan bitez $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ matrizeak.

a) $[\![\boldsymbol{1\ puntu}]\!]$ Arrazoitu ezazu zer dimentsio izan behar duten *P* eta *Q* matrizeek $(A \cdot P \cdot B^t)$ eta $(Q \cdot A \cdot C)$ biderketen emaitzak matrize karratuak izan daitezen.

b) $[\![\boldsymbol{1,5\ puntu}]\!]$ Ebatz ezazu honako ekuazio matrizial hau:

$$A \cdot X - 2B \cdot C^t = A^t$$

B.1. $[\![\boldsymbol{gehienez\ 2,5\ puntu}]\!]$

Panpina-etxeetarako altzariak egiten espezializatutako enpresa batek 20 €-an eta 30 €-an saltzen dituen mahaiak eta aulkiak ekoizten ditu, hurrenez hurren. **Diru-sarrerak** maximizatzeko, enpresak jakin nahi du egunean artikulu bakoitzeko zenbat unitate ekoiztu behar dituen, honako murrizketa hauek kontuan hartuta:

- Bi artikulu horietatik ekoiztutako unitate-kopurua, guztira, ezin izango da egunean 4 baino handiagoa izan.
- Mahai bakoitza ekoizteko 2 ordu behar dira, eta aulki bakoitzerako 3 ordu. Gehieneko lanaldia 10 ordu da.
- Mahai bakoitzean erabilitako materialak 4 € balio du, eta aulki bakoitzean erabilitakoak 2 €. Materialerako aurrekontua 12 € da egunean.

	PREZIOA	MATERIALA	DENBORA	UNITATEAK
MAHAIA	20 €	4 €	2 ordu	x
AULKIA	30 €	2 €	3 ordu	y

a) $[\![\boldsymbol{2,1\ puntu}]\!]$ Plantea eta ebatz ezazu maximizazio-problema.

b) $[\![\boldsymbol{0,4\ puntu}]\!]$ Arrazoitu ezazu ea murrizketa horiekin egunean mahai bat eta aulki bat ekoiztu daitezkeen, eta ea hori enpresari komeni zaion.

BLOKEA: ANALISIA

A.2. $[\![\textit{gehienez } 2,5 \textit{ puntu}]\!]$

a) $[\![0,8 \textit{ puntu}]\!]$ $g(x) = ax^3 + bx + c$ funtzioaren grafikoak honako ezaugarri hauek ditu:

- $(0, \ 0)$ puntutik igarotzen da.
- $(1, \ -1)$ puntuan minimo erlatibo bat dauka.

Aurki itzazu *a, b* eta *c* parametroen balioak.

b) $[\![1 \textit{ puntu}]\!]$ Zehaztu itzazu $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$ funtzioaren maximo erlatiboak, minimo erlatiboak eta inflexio puntuak, eta egin ezazu adierazpen grafikoa.

c) $[\![0,7 \textit{ puntu}]\!]$ Kalkula ezazu *OX* abzisa-ardatzak, $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$ funtzioaren grafikoak, eta $x = 3$ eta $x = 4$ zuzenek mugatutako eskualdearen azalera.

B.2. $[\![\textit{gehienez } 2,5 \textit{ puntu}]\!]$

Izan bedi $f(x)$ funtzioa :

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8x + 6 & \textit{baldin eta } x \le 1 \textit{ bada} \\ -2x^2 + 8x - 6 & \textit{baldin eta } x > 1 \textit{ bada} \end{cases}$$

a) $[\![1,7 \textit{ puntu}]\!]$ Azter itzazu funtzioaren jarraitasuna eta deribagarritasuna.

b) $[\![0,4 \textit{ puntu}]\!]$ Zehaztu itzazu funtzioaren mutur erlatiboak.

c) $[\![0,4 \textit{ puntu}]\!]$ Egin ezazu funtzioaren adierazpen grafikoa.

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

BLOKEA: PROBABILITATEA

A.3. $[\![gehienez\ 2,5\ puntu]\!]$

Karta sorta batetik Lucíak eta Carlosek 8 karta atera dituzte: lau batekoak eta lau erregeak. 8 karta horietatik, Lucíak bi karta eman dizkio Carlosi, eta, ondoren, karta bat hartu du berarentzat.

Kalkula itzazu:

a) $[\![0,4\ puntu]\!]$ Carlosek bi bateko izateko probabilitatea.

b) $[\![0,6\ puntu]\!]$ Carlosek bateko bat eta errege bat izateko probabilitatea.

c) $[\![0,7\ puntu]\!]$ Lucíak bateko bat izateko eta Carlosek bi errege ez izateko probabilitatea.

d) $[\![0,8\ puntu]\!]$ Lucíak errege bat izateko probabilitatea.

B.3. $[\![gehienez\ 2,5\ puntu]\!]$

Jimenak bi traje gorri, urdin bat eta zuri bat ditu. Gainera, zapata gorri pare bat, kolore urdineko beste bat eta bi pare zuri ditu.

Zoriz nola jantzi erabakitzen baldin badu, zehaztu itzazu honako gertaera hauen probabilitateak:

a) $[\![0,3\ puntu]\!]$ Traje gorria eta zapata zuriak janztea.

b) $[\![0,4\ puntu]\!]$ Ez joatea guztiz zuriz jantzita.

c) $[\![0,4\ puntu]\!]$ Zapata urdinak janztea.

d) $[\![0,5\ puntu]\!]$ Zapata urdinak edo zuriak janztea.

e) $[\![0,4\ puntu]\!]$ Guztiz kolore berberaz jantzita joatea.

f) $[\![0,5\ puntu]\!]$ Zapata gorriak eramatea, jakinda ez dagoela guztiz kolore berberaz jantzita.

BLOKEA: INFERENTZIA ESTATISTIKOA

A.4. $[\![gehienez\ 2,5\ puntu]\!]$

Hiri jakin bateko Batxilergoko ikasleek astean kirola egiteko erabiltzen duten ordu kopurua aldagai aleatorio bat da, eta batezbestekoa 8 eta bariantza 7,29 dituen banaketa normal bati jarraitzen dio.

36 tamainako zorizko lagin sinple bat aukeratzen da.

a) $[\![0,75\ puntu]\!]$ Adieraz ezazu $\bar{X}$ laginaren batezbestekoaren banaketa.

b) $[\![1\ puntu]\!]$ Zein da astean kirola egiteko erabiltzen duten batez besteko ordu kopurua 7,82 eta 8,36 artean egoteko probabilitatea?

c) $[\![0,75\ puntu]\!]$ $\bar{X}$ laginaren batezbestekoaren banaketan, lor ezazu % 99rako tarte bereizgarria.

B.4. $[\![gehienez\ 2,5\ puntu]\!]$

Unibertsitate jakin batean, 400 ikasleko zorizko lagin sinple bat aukeratu da, eta ikusi da horietatik 160k irakasgai guztiak gainditu dituztela.

a) $[\![1,25\ puntu]\!]$ Zenbatets ezazu irakasgai guztiak gainditzen dituzten unibertsitateko ikasleen portzentajea, % 97ko konfiantza-mailaz.

b) $[\![0,5\ puntu]\!]$ Kalkula ezazu errore maximo onargarria, aipatutako konfiantza-mailaz.

c) $[\![0,75\ puntu]\!]$ Aurreko emaitza ikusita, esperientzia errepikatu nahi da errore maximo onargarria 0,04 baino handiago izan ez dadin, konfiantza-maila beraz. Zenbat ikasle izan behar ditu, gutxienez, laginak?

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1. $[\![\textbf{hasta 2,5 puntos}]\!]$

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) $[\![\textbf{1 punto}]\!]$ Razona qué dimensión deben tener las matrices *P* y *Q* para que los productos $(A \cdot P \cdot B^t)$ y $(Q \cdot A \cdot C)$ den como resultado una matriz cuadrada.

b) $[\![\textbf{1,5 puntos}]\!]$ Resuelve la ecuación matricial:

$$A \cdot X - 2B \cdot C^t = A^t$$

B.1. $[\![\textbf{hasta 2,5 puntos}]\!]$

Una empresa especializada en la fabricación de mobiliario para casas de muñecas produce mesas y sillas que vende a 20 € y 30 €, respectivamente. La empresa quiere saber cuántas unidades de cada artículo debe fabricar diariamente para maximizar **los ingresos**, teniendo en cuenta las siguientes restricciones:

- El número total de unidades producidas de ambos artículos no podrá exceder de 4, por día.
- Cada mesa requiere 2 horas para su fabricación y cada silla 3 horas. La jornada laboral máxima es de 10 horas.
- El material utilizado en cada mesa cuesta 4 €, y el utilizado en cada silla 2 €. El presupuesto para material es de 12 € diarios.

	PRECIO	MATERIAL	TIEMPO	UNIDADES
MESA	20 €	4 €	2 horas	x
SILLA	30 €	2 €	3 horas	y

a) $[\![\textbf{2,1 puntos}]\!]$ Plantea y resuelve el problema de maximización.

b) $[\![\textbf{0,4 puntos}]\!]$ Razona si con estas restricciones se puede fabricar diariamente 1 mesa y 1 silla, y si esto le conviene a la empresa.

BLOQUE: ANÁLISIS

A.2. $[\![hasta\ 2,5\ \ puntos]\!]$

a) $[\![0,8\, puntos]\!]$ La gráfica de la función $g(x) = ax^3 + bx + c$ tiene las siguientes características:

- Pasa por el punto $(0, \quad 0)$.
- Tiene un mínimo relativo en el punto $(1, \quad -1)$.

Obtén el valor de los parámetros *a, b* y *c*.

b) $[\![1\ punto]\!]$ Determina los máximos relativos, mínimos relativos y puntos de inflexión de la función $f(x) = \frac{1}{2}\, x^3 - \frac{3}{2}\, x$, y realiza su representación gráfica.

c) $[\![0,7\ \ puntos]\!]$ Halla el área de la región limitada por el eje de abscisas *OX*, la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{2}\, x^3 - \frac{3}{2}\, x$, y las rectas $x = 3$ y $x = 4$.

B.2. $[\![hasta\ 2,5\ puntos]\!]$

Se considera la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8x + 6 & si\ x \leq 1 \\ -2x^2 + 8x - 6 & si\ x > 1 \end{cases}$$

a) $[\![1,7\ puntos]\!]$ Estudia la continuidad y derivabilidad de la función.

b) $[\![0,4\ puntos]\!]$ Determina los extremos relativos de la función.

c) $[\![0,4\ puntos]\!]$ Representa la gráfica de la función.

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

2023ko OHIKOA

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

ORDINARIA 2023

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

BLOQUE: PROBABILIDAD

A.3. $[\![hasta\ 2,5\ puntos]\!]$

De una baraja, Lucía y Carlos han extraído 8 cartas: los cuatro ases y los cuatro reyes. De esas 8 cartas, Lucía le ha dado dos cartas a Carlos y, posteriormente, ha cogido una carta para ella.

Calcula:

- **a)** $[\![0,4\ puntos]\!]$ La probabilidad de que Carlos tenga dos ases.
- **b)** $[\![0,6\ puntos]\!]$ La probabilidad de que Carlos tenga un as y un rey.
- **c)** $[\![0,7\ puntos]\!]$ La probabilidad de que Lucía tenga un as y Carlos no tenga dos reyes.
- **d)** $[\![0,8\ puntos]\!]$ La probabilidad de que Lucía tenga un rey.

B.3. $[\![hasta\ 2,5\ puntos]\!]$

Jimena tiene dos trajes rojos, un traje azul y uno blanco. Además, tiene un par de zapatos de color rojo, otro par de color azul y dos pares blancos.

Si decide aleatoriamente qué ponerse, determina las probabilidades de los siguientes sucesos:

- **a)** $[\![0,3\ puntos]\!]$ Llevar traje rojo y zapatos blancos.
- **b)** $[\![0,4\ puntos]\!]$ No ir vestida totalmente de blanco.
- **c)** $[\![0,4\ puntos]\!]$ Llevar zapatos azules.
- **d)** $[\![0,5\ puntos]\!]$ Llevar zapatos azules o blancos.
- **e)** $[\![0,4\ puntos]\!]$ Ir vestida totalmente del mismo color.
- **f)** $[\![0,5\ puntos]\!]$ Llevar zapatos rojos, sabiendo que no está vestida totalmente del mismo color.

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

A.4. $[\![hasta\ 2,5\ puntos]\!]$

El número de horas semanales que las y los estudiantes de bachillerato de una determinada ciudad dedican al deporte es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media 8 y varianza 7,29.

Se elige una muestra aleatoria simple de tamaño 36.

- **a)** $[\![0,75\ puntos]\!]$ Indica cuál es la distribución de la media muestral, $\bar{X}$.
- **b)** $[\![1\ punto]\!]$ ¿Cuál es la probabilidad de que el número medio de horas semanales que dedican al deporte esté entre 7,82 y 8,36?
- **c)** $[\![0,75\ puntos]\!]$ En la distribución de la media muestral $\bar{X}$, obtén el intervalo característico para el 99 %.

B.4. $[\![hasta\ 2,5\ puntos]\!]$

En una cierta universidad se ha tomado una muestra aleatoria simple de 400 estudiantes, y se ha observado que de ellos 160 han aprobado todas las asignaturas.

- **a)** $[\![1,25\ puntos]\!]$ Estima el porcentaje de estudiantes de esa universidad que aprueban todas las asignaturas, con un nivel de confianza del 97 %.
- **b)** $[\![0,5\ puntos]\!]$ Calcula el error máximo admisible, con el nivel de confianza indicado.
- **c)** $[\![0,75\ puntos]\!]$ A la vista del resultado anterior, se quiere repetir la experiencia para conseguir que el error máximo admisible no sea superior a 0,04, con el mismo nivel de confianza. ¿Cuántos estudiantes, como mínimo, ha de tener la muestra?

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

GIZARTE-ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK

1. Azterketa zortzi problemaz osatuta dago.
2. ***Zortzi problema horietatik lauri erantzun behar zaie, eta lau horiek gutxienez hiru bloke desberdinetakoak izan behar dute.***
3. Galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak egin diren ordenaren arabera zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.
4. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
5. Ariketa bakoitza 0 eta 2,5 puntu artean baloratuko da.
6. Galdera batean erabili beharreko ebazpen-metodoa zehazten ez bada, galdera hori modu egokian ebazten duen edozein bide onartuko da.

BALORAZIO POSITIBOA MEREZI DUTEN FAKTOREAK

- Planteamendu zuzenak, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik baldin badago).
- Kontzeptuak, hiztegia eta notazio zientifikoa zuzen erabiltzea.
- Zenbakizko datuak eta datu grafikoak interpretatzeko edo/eta kalkulatzeko erabiltzen diren teknika espezifikoak ezagutzea.
- Problema osorik bukatzea eta emaitzaren zehaztasuna.
- Bi emaitza zenbakizko kalkuluetan erabilitako zehaztasun-mailan soilik desberdintzen badira, biak ontzat emango dira.
- Zenbakizko akatsak, kalkuluetan egindakoak, etab., ez dira kontuan hartuko baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
- Ariketa ebaztean egindako pausoen azalpen argia.
- Ariketa eta haren soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, grafikoak, aurkezpenak, eskemak, …
- Aurkezpenaren txukuntasuna, bai eta unibertsitatera sartzear dagoen ikasle batek beharko lukeen heldutasuna erakusten duen beste edozein alderdi.

BALORAZIO NEGATIBOA MEREZI DUTEN FAKTOREAK

- Planteamendu okerrak.
- Kontzeptuen nahasketa.
- Kalkulu-akatsen ugaritasuna (oinarrizko gabezien adierazle delako).
- Akats bakanak, hausnarketa kritikoa edo sen ona falta dela erakusten dutenean (adibidez, problema baten soluzioa –3,7 hozkailu dela esatea, edo probabilitate baten balioa 2,5 dela esatea).
- Akats bakanak, haien ondorioz ebatzitako problema hasieran proposatutakoa baino errazagoa bilakatzen denean.
- Azalpenik eza, bereziki erabiltzen ari diren aldagaien esanahia.
- Akats ortografiko larriak, desordena, garbitasun falta, idazkera okerra, eta unibertsitatera sartzear dagoen ikasle batek izan beharko ez lukeen edozein ezaugarri desegoki.

Universidad del País Vasco · Euskal Herriko Unibertsitatea

CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

ARIKETA BAKOITZARI DAGOZKION IRIZPIDE BEREZIAK

BLOKEA: ALJEBRA

A.1. ariketa *(gehienez 2,5 puntu)*

a. **1 puntu**
- *A, B, C, P* eta *R* matrizeen dimentsioak zehaztea, **0,2 puntu**.
- $A \cdot P \cdot B^t$ matrizearen dimentsioa, **0,4 puntu.**
- $Q \cdot A \cdot C$ matrizearen dimentsioa, **0,4 puntu.**

b. **1,5 puntu.** Ekuazio matriziala ebaztea.
- X matrizea zehaztea, **0,3 puntu.**
- A alderantzizko matrizea kalkulatzea.
  - A matrizearen determinantea kalkulatzea, **0,1 puntu.**
  - $Adj\,A$ matrizea zehaztea**, 0,2 puntu.**
  - A^{-1} matrizea kalkulatzea, **0,25 puntu.**
- X matrizea zehaztea.
  - $2B \cdot C^t$ matrizea kalkulatzea, **0,25 puntu.**
  - $A^t + 2B \cdot C^t$ matrizea kalkulatzea **0,15 puntu.**
  - X matrizea kalkulatzea, **0,25 puntu.**

B.1. ariketa ***(gehienez 2,5 puntu)***

a. 2,1 puntu.

- Helburu-funtzioa zehaztea, **0,1 puntu.**
- Murrizketak zehaztea, **0,2 puntu.**
- Bideragarritasun-eskualdea irudikatzea eta zehaztea.
  - Murrizketa bakoitzaren irudikapena 0,1 puntu; beraz, **0,3 puntu.**
  - Bideragarritasun-eskualdea zehaztea, **0,3 puntu.**
- Bideragarritasun-eskualdeko erpinak zehaztea.
  - A erpina, **0,1 puntu.**
  - B erpina, **0,1 puntu.**
  - C erpina, **0,1 puntu.**
  - D erpina, **0,1 puntu.**
- Funtzioa erpinetan baloratzea, **0,3 puntu.**
- Maximoak zehaztea **0,2 puntu.**
- Erabakitzea, arrazoituz, zein den maximoa **0,2 puntu.**
- Funtzioaren balioa zehaztea puntu maximo horretan, **0,1 puntu.**

b. 0,4 puntu.

- $(1, \quad 1)$ puntua bideragarritasun-eskualdearen barruan dagoela zehaztea, arrazoituz, **0,2 puntu.**
- Ondorioztatzea ez dela komeni, **0,2 puntu.**

BLOKEA: ANALISIA

A.2. ariketa *(gehienez 2,5 puntu)*

a. 0,8 puntu. a, b eta c parametroen balioak zehaztea.

- Lehenengo deribatua kalkulatzea, **0,1 puntu.**
- (0, 0) puntua funtzioaren puntu bat da, **0,1 puntu.**
- (1, −1) puntua funtzioaren puntu bat da, **0,2 puntu.**
- (1, 1) puntuan funtzioak minimo erlatibo bat du, **0,2 puntu.**
- Sortzen den sistema ebaztea, **0,2 puntu.**

b. 1 puntu

- Funtzioaren mutur erlatiboaren kalkulua, **0,1 puntu.**
- Funtzioaren minimo eta maximo erlatiboak zehaztea, **0,2 puntu.**
- Inflexio-puntuak zehaztea.
  - Bigarren deribatua, **0,1 puntu.**
  - Inflexio-puntua zehaztea, **0,2 puntu.**
- Funtzioaren adierazpen grafikoa, **0,4 puntu.**

c. 0,7 puntu. Funtzioak, *OX* ardatzak eta bi zuzenek mugatutako eskualdearen azalera.

- Integral mugatua zehaztea, **0,2 puntu.**
- Integral mugatua kalkulatzea **0,2 puntu.**
- Barrow aplikatzea **0,2 puntu.**
- Azalera zehaztea**, 0,1 puntu.**

B.2. ariketa ***(gehienez 2,5 puntu)***

a. 1,7 puntu

- Jarraitutasuna aztertzea.
  - Jarraitutasuna $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ tarteetan, **0,3 puntu.**
  - Funtzio baten jarraitutasuna puntu batean definitzea, **0,1 puntu.**
  - $x = 1$ puntuan funtzioaren jarraitutasuna aztertzea.
    - Alboko limiteak kalkulatzea, **0,2 puntu.**
    - $f(1)$-en balioa zehaztea, **0,1 puntu.**
    - Ondorioztatzea nolakoa den funtzioa $x = 1$ puntuan, **0,1 puntu.**
- Deribagarritasuna aztertzea**.**
  - Deribagarritasuna $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ tarteetan, **0,3 puntu.**
  - Funtzio baten deribagarritasuna puntu batean definitzea, **0,2 puntu.**
  - Funtzioaren deribagarritasuna $x = 1$ puntuan aztertzea.
    - Funtzioaren deribatuaren kalkulua, **0,1 puntu**
    - Alboko deribatuen kalkulua, **0,2 puntu.**
    - Ondorioztatzea nolakoa den funtzioa $x = 1$ puntuan, **0,1 puntu.**

b. 0,4 puntu. Funtzioaren maximo eta minimo erlatiboak aztertzea.

- Funtzio baten maximo eta minimo erlatiboak definitzea, **0,1 puntu.**
- Funtzioaren lehenengo deribatua kalkulatzea, **0,1 puntu.**
  - $x \leq 1$ bada, maximo eta minimo erlatiboak zehaztea, **0,1 puntu.**
  - $x > 1$ bada, maximo eta minimo erlatiboak zehaztea, **0,1 puntu.**

c. 0,4 puntu.

- Funtzioaren adierazpen grafikoa.
  - $x \leq 1$ bada, funtzioaren adierazpen grafikoa, **0,2 puntu.**
  - $x > 1$ bada, funtzioaren adierazpen grafikoa, **0,2 puntu.**

BLOKEA: PROBABILITATEA

A.3. ariketa ***(gehienez 2,5 puntu)***

1. MODUA (ANALITIKOKI)

a. 0,4 puntu

- Adieraztea zer kalkulatu behar den, **0,1 puntu.**
- $P(A_C \cap A_C)$ probabilitatearen formula adieraztea, **0,1 puntu.**
- Probabilitatearen kalkulua, **0,2 puntu.**

b. 0,6 puntu

- Adieraztea zer kalkulatu behar den, **0,1 puntu.**
- Probabilitate osoaren formula adieraztea, **0,3 puntu.**
- Probabilitatearen kalkulua, **0,2 puntu.**

c. 0,7 puntu

- Adieraztea zer jaso behar duen Carlosek, **0,2 puntu**
- Adieraztea zer probabilitate kalkulatu behar diren, **0,2 puntu**.
- Probabilitatearen kalkulua, **0,3 puntu.**

d. 0,8 puntu

- Probabilitate osoaren formula adieraztea, **0,4 puntu.**
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,4 puntu.**

2. MODUA (ZUHAITZ-DIAGRAMA BATEN BIDEZ)

a. 0,4 puntu

- Zuhaitz-diagrama egitea, **0,2 puntu**.
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,2 puntu.**

b. 0,6 puntu

- Zuhaitz-diagrama egitea, **0,2 puntu**.
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,4 puntu.**

c. 0,7 puntu

- Zuhaitz-diagrama egitea, **0,2 puntu**.
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,5 puntu.**

d. 0,8 puntu

- Zuhaitz-diagrama egitea, **0,2 puntu**.
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,6 puntu.**

OHARRA: Atal bakoitzean zuhaitz-diagrama bat egitea baloratuko da, zuzentzeko irizpideetan adierazten den bezala, ataleko puntuazio osoa izan ezean.

B.3. ariketa ***(gehienez 2,5 puntu)***

a. 0,3 puntu

- Zuhaitz-diagrama edo eskemaren bat egitea, **0,1 puntu.**
- Adieraztea zer kalkulatu behar den, **0,1 puntu.**
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,1 puntu.**

b. 0,4 puntu

- Zuhaitz-diagrama edo eskemaren bat egitea, **0,1 puntu.**
- Adieraztea zer kalkulatu behar den, **0,1 puntu.**
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,2 puntu.**

c. 0,4 puntu

- Zuhaitz-diagrama edo eskemaren bat egitea, **0,1 puntu.**
- Adieraztea zer kalkulatu behar den, **0,1 puntu.**
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,2 puntu.**

d. 0,5 puntu

- Zuhaitz-diagrama edo eskemaren bat egitea, **0,1 puntu.**
- Adieraztea zer kalkulatu behar den, **0,2 puntu.**
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,2 puntu.**

e. 0,4 puntu

- Zuhaitz-diagrama edo eskemaren bat egitea, **0,1 puntu.**
- Adieraztea zer kalkulatu behar den, **0,1 puntu.**
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,2 puntu.**

f. 0,5 puntu

- Zuhaitz-diagrama edo eskemaren bat egitea, **0,1 puntu.**
- Probabilitate baldintzatuaren formula adieraztea, **0,2 puntu.**
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,2 puntu.**

OHARRA: Atal bakoitzean zuhaitz-diagrama bat egitea baloratuko da, zuzentzeko irizpideetan adierazten den bezala, ataleko puntuazio osoa izan ezean.

BLOKEA: INFERENTZIA ESTATISTIKOA

A.4. ariketa *(gehienez 2,5 puntu)*

a. 0,75 puntu

- Problemaren planteamendua, **0,25 puntu.**
- Laginaren batezbestekoaren banaketa, **0,5 puntu.**

b. 1 puntu

- Problemaren planteamendua, **0,15 puntu.**
- Aldagaiaren tipifikazioa, **0,25 puntu.**
- $P(\bar{X} \leq 8{,}36)$ probabilitatea zehaztea, **0,25 puntu.**
- $P(\bar{X} \leq 7{,}82)$ probabilitatea zehaztea, **0,25 puntu.**
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,1 puntu.**

c. 0,75 puntu

- Tarte bereizgarria nola adierazten den zehaztea, **0,3 puntu.**
- Banaketa normalaren taulan balioa zehaztea, **0,2 puntu.**
- Tarte bereizgarria zehaztea, **0,25 puntu.**

B.4. ariketa ***(gehienez 2,5 puntu)***

a. 1,25 puntu
- Laginaren proportzioa zer den badakiela adieraztea, **0,2 puntu.**
- Laginaren proportziorako konfiantza-tartearen formula zehaztea, **0,25 puntu.**
- $z_{\frac{\alpha}{2}}$ zehaztea, **0,3 puntu.**
- Eskatutako konfiantza-tartea, **0,35 puntu.**
- Eskatutako portzentajea zehaztea, **0,15 puntu.**

b. 0,5 puntu
   a. Errorearen formula adieraztea edo errore maximo onargarria zer den adieraztea, **0,2 puntu.**
   b. Errorea kalkulatzea, **0,3 puntu.**

c. 0,75 puntu
   a. Errorearen formula adieraztea, **0,25 puntu.**
   b. Laginaren tamaina kalkulatzea**, 0,5 puntu.**

EBAZPENAK

BLOKEA: ALJEBRA

A.1. *Kalkulu matriziala. Alderantzizko matrizea kalkulatzea. Ekuazio matriziala ebaztea.*

Izan bitez $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ eta $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ matrizeak.

a) Arrazoituko dugu P eta Q matrizeek zer dimentsio izan behar duten $(A \cdot P \cdot B^t)$ eta $(Q \cdot A \cdot C)$ biderketen emaitzak matrize karratuak izan daitezen.

- $A \in \mathcal{M}_{2X2}$, $B, C \in \mathcal{M}_{2X3}$, $P \in \mathcal{M}_{mXn}$, $Q \in \mathcal{M}_{rXs}$
- $B \in \mathcal{M}_{2X3} \Rightarrow B^t \in \mathcal{M}_{3X2}$

- $A \cdot P \cdot B^t$ matrizearen dimentsioa zehaztuko dugu:
  - $A \cdot P \cdot B^t = (A \cdot P) \cdot B^t$
    - $\exists A \cdot P \Rightarrow m = 2 \Rightarrow A \cdot P \in \mathcal{M}_{2Xn}$
    - $\exists (A \cdot P) \cdot B^t \Rightarrow n = 3 \Rightarrow (A \cdot P) \cdot B^t \in \mathcal{M}_{2X2}$
  - Beraz, $\boldsymbol{m = 2}$, $\boldsymbol{n = 3}$ **baldin badira** $\Longrightarrow \exists \boldsymbol{A \cdot P \cdot B^t}$ **eta 2. ordenako matrize karratua da.**

- $Q \cdot A \cdot C$ matrizearen dimentsioa zehaztuko dugu:
  - $Q \cdot A \cdot C = (Q \cdot A) \cdot C$
    - $\exists Q \cdot A \Rightarrow s = 2 \Rightarrow Q \cdot A \in \mathcal{M}_{rX2}$
    - $(Q \cdot A) \cdot C \in \mathcal{M}_{3X3} \Rightarrow r = 3$
  - Beraz, $\boldsymbol{r = 3}$, $\boldsymbol{s = 2}$ **baldin badira** $\Longrightarrow \exists \boldsymbol{Q \cdot A \cdot C}$ **eta 3. ordenako matrize karratua da.**

b) Ekuazio matriziala ebatziko dugu: $A \cdot X - 2B \cdot C^t = A^t$

$$A \cdot X - 2B \cdot C^t = A^t \quad \Rightarrow \quad A \cdot X = A^t + 2B \cdot C^t \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{X = A^{-1} \cdot (A^t + 2B \cdot C^t)}$$

- Alderantzizko matrizearen kalkulua:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \, (Adj\ A)^t$$

- $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 2$
- Adjuntuak:

$A_{11} = (-1)^2 \cdot 4 = 4$ $\qquad$ $A_{21} = (-1)^3\, 2 = -2$

$A_{12} = (-1)^3 \cdot -3 = 3$ $\qquad$ $A_{22} = (-1)^4 \cdot -1 = -1$

Orduan:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\ A)^t = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- $2B \cdot C^t = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

- $A^t + 2B \cdot C^t = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 16 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -13 \\ 18 & 20 \end{pmatrix}$

Beraz:

$$X = A^{-1} \cdot (A^t + 2B \cdot C^t) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -13 \\ 18 & 20 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -20 - 36 & -52 - 40 \\ -15 - 18 & -39 - 20 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -56 & -92 \\ -33 & -59 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -28 & -46 \\ -33/2 & -59/2 \end{pmatrix}}$$

B.1 *Bi aldagaiko programazio linealeko problema.*

	PREZIOA	MATERIALA	DENBORA	UNITATEAK
MAHAIA	20 €	4 €	2 ordu	x
AULKIA	30 €	2 €	3 ordu	y

a) Problema planteatu eta ebatzi egingo dugu.

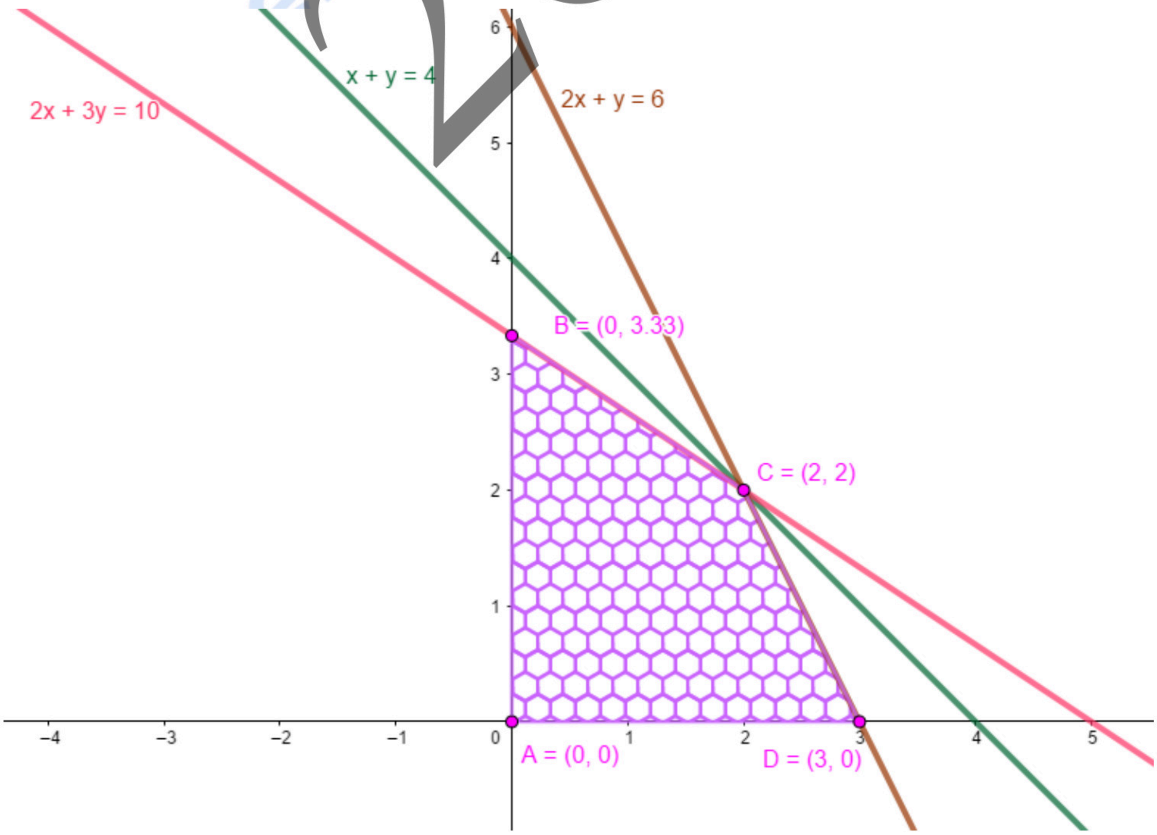
- Helburu-funtzioa hau da:

$f(x,\quad y) = 20\,x + 30\,y$

- Murrizketak honako hauek dira:

$$\begin{cases} x + y \le 4 \\ 2x + 3y \le 10 \\ 2x + y \le 6 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{cases}$$

- Soluzio bideragarrien esparrua XY planoan:



- B erpinaren kalkulua:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases} \Rightarrow \; 3x = 10 \;\; \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{10}{3} \end{cases} \Longrightarrow B\left(0\,,\frac{10}{3}\right)$$

Beraz, erpinak hauek dira:

$$A(\,0\;,0\,)\,,\qquad B\left(0\;,\frac{10}{3}\right),\qquad C(\,2\;,2\,),\qquad D(\,3\;,0\,)$$

- Erpin horietan helburu-funtzioak hartzen dituen balioak kalkulatuko ditugu:
    - $f(A) = f(\,0,\quad 0) = \;0$
    - $f(B) = f\left(0,\quad \frac{10}{3}\right) = \;100$
    - $f(C) = f(\,2,\quad 2) = \;100$
    - $f(D) = f(\,3,\quad 0) = \;60$

- Funtzioak $B\left(0,\ \frac{10}{3}\right)$ eta $C(\,2, 2\,)$ puntuetan lortzen du balio maximoa; beraz, $\overline{BC}$ zuzenkiaren puntu guztietan.
- Hala ere, ekoiztutako mahai eta aulkien kopuruak zenbaki arrunta izan behar duenez, koordenatu arruntak dituen $\overline{BC}$ zuzenkiaren puntu bakarrean lortzen da soluzioa, hau da, $C(\,2,\ 2\,)$ puntuan.
- Ondorioz, enpresak **bi aulki eta bi mahai ekoiztu behar ditu egunean diru-sarrera maximoa lortzeko: 100 €, hain zuzen ere**.

b) Egunean mahai bat eta aulki bat ekoiztu daitezke?, komeni zaio hori enpresari?

$(1,\quad 1)$ puntua soluzio bideragarrien esparruaren barruan dago; beraz, baldintza guztiak betetzen ditu. Ondorioz, **mahai bat eta aulki bat ekoiztu daitezke egunean**, baina puntu horretan ez litzateke diru-sarrera maximoa lortuko; beraz, **enpresari ez zaio komeni**.

BLOKEA: ANALISIA

A.2. *Funtzio baten ezaugarriak. Funtzio baten parametroen balioa kalkulatzea. Adierazpen grafikoa.*

a) *a, b* eta *c* parametroen balioak zehaztea.

$$g(x) = ax^3 + bx + c$$

- Funtzioa $(0\,,\ 0\,)$ puntutik igarotzen da $\Longrightarrow\ g(\,0\,) = 0 \quad \Longrightarrow\ c = 0$

Beraz, $\boldsymbol{g(x) = ax^3 + \ bx}$

- Funtzioa $(\,1\ ,\ -1\,)$ puntutik igarotzen da $\Longrightarrow\ g(\ 1\,) = -\,1 \Longrightarrow\ a + b = \ -1$
- Funtzioak minimo erlatibo bat badu $x = 1$ puntuan $\Longrightarrow g'(\,1\,) = 0$

$$g'(x) = 3ax^2 + b \ \Longrightarrow g'(\,1\,) = 0 = 3a + b \Longrightarrow \ 3a + b = 0$$

Beraz:

$\begin{cases} a + b = -1 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$ eta $b = \frac{-3}{2}$

$$\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x}$$

b) Maximo erlatiboak, minimo erlatiboak, inflexio-puntuak eta adierazpen grafikoa.

$$f(x) = \frac{1}{2}\,x^3 - \frac{3}{2}\,x$$

- Maximo eta minimo erlatiboen definizioa hau da:

$$\boxed{f'(x_0) = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} f''(x_0) < 0 & (\,x_0\,, f(x_0)\,)\ maximo\ erlatiboa \\ f''(x_0) > 0 & (\ x_0\,, f(x_0)\,)\ minimo\ erlatiboa \end{cases}}$$

✓ $f'(\,x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}$

✓ $f'(\,x) = 0 \ \Longrightarrow \frac{3}{2}\cdot x^2 - \frac{3}{2} = 0 \Longrightarrow\ x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$ puntu singularrak

✓ $f''(\,x) = 3x \ \Longrightarrow$

$f''(-1) = -3\ < 0 \Longrightarrow\ (\mathbf{-1},\ \mathbf{1}\,)$ **Maximo erlatiboa**

$f''(\,1) = 3 > 0 \qquad \Longrightarrow (\,\mathbf{1}\,, \mathbf{-1}\,)$ **Minimo erlatiboa**

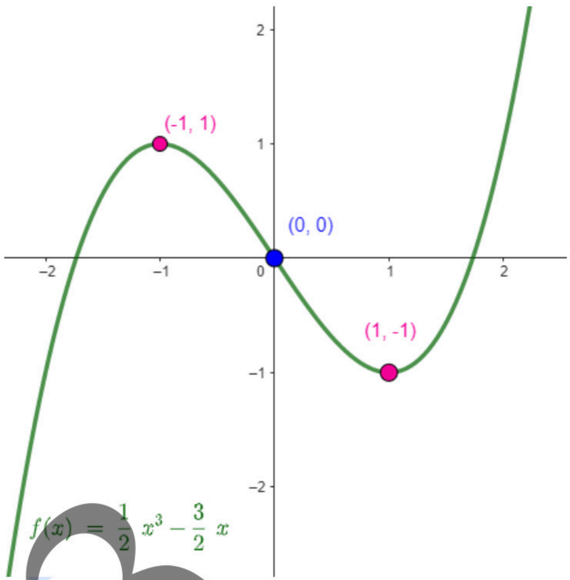
- Inflexio-puntuaren definizioa hau da:

$$\boxed{f''(x_0) = 0 \ \ \wedge \ f'''(x_0) \neq 0 \ \ \Rightarrow \ \ (\,x_0, f(x_0)\,)\ \boldsymbol{inflexio-puntua}}$$

- ✓ $f''(x) = 3x = 0 \implies x = 0$
- ✓ $f'''(x) = 3 \Rightarrow f'''(0) = 3 \neq 0 \Rightarrow$

$(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ **Inflexio-puntua**

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	1	0	-1	5

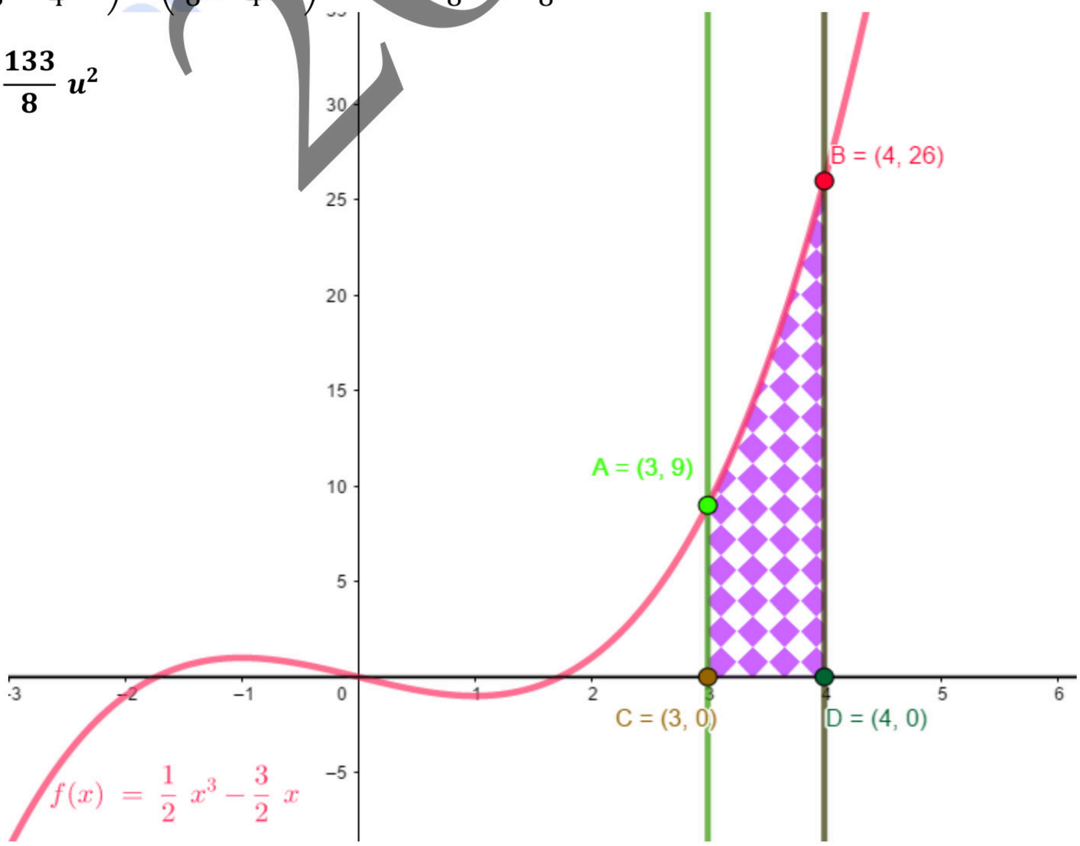


c) *OX* abzisa-ardatzak, $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$ funtzioaren grafikoak eta $x = 3$ eta $x = 4$ zuzenek mugatutako eskualdearen azalera kalkulatuko dugu:

$$A = \int_3^4 \left[\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right) - 0\right] dx = \int_3^4 \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right) dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\right]_3^4 = \left[\frac{x^4}{8} - \frac{3}{4}x^2\right]_3^4 =$$

$$= \left(\frac{4^4}{8} - \frac{3}{4}4^2\right) - \left(\frac{3^4}{8} - \frac{3}{4}3^2\right) = 20 - \frac{27}{8} = \frac{133}{8}\, u^2$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A = \frac{133}{8}\, u^2}$$



B.2 *Funtzio baten jarraitutasuna eta deribagarritasuna. Adierazpena grafikoa.*

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8x + 6 & baldin\ x \le 1\ \ bada \\ -2x^2 + 8x - 6 & baldin\ x > 1\ \ bada \end{cases}$$

a) Funtzioaren jarraitutasuna eta deribagarritasuna aztertuko ditugu:

JARRAITUTASUNA

- Definizioz, funtzioa **jarraitua da** $\mathbb{R} - \{\mathbf{1}\}$ **tarteetan**: polinomioak dira.
- $x = 1$ puntuan aztertuko dugu jarraitutasuna:

$$\boxed{f(x)\ \ jarraitua\ \ x = 1\ \ puntuan \ \Leftrightarrow\ \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)}$$

- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 2x^2 - 8x + 6 = 0$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} -2x^2 + 8x - 6 = 0$
- $f(1) = 0$

Orduan: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 0 \ \Rightarrow$ funtzioa **jarraitua da $x = 1$ puntuan.**

Beraz, **funtzioa $\mathbb{R}$ osoan jarraitua da.**

DERIBAGARRITASUNA

- Definizioz, funtzioa **deribagarria da** $\mathbb{R} - \{\mathbf{1}\}$ tarteetan: polinomioak dira.
- $x = 1$ puntuan aztertuko dugu deribagarritasuna:

$$\boxed{f(x)\ deribagarria\ \ x = 1\ \ puntuan\ \ \Leftrightarrow\ \ f'(1^-) = f'(1^+)}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - 8 & baldin\ \ x < 1\ \ bada \\ -4x + 8 & baldin\ \ x > 1\ \ bada \end{cases}$$

- Alboko deribatuak kalkulatuko ditugu $x = 1$ puntuan:

$$\left.\begin{aligned} f'(1^-) &= -4 \\ f'(1^+) &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ f'(1^-) \ne f'(1^+)$$

Orduan, $f(x)$ ez da deribagarria $x = 1$ puntuan.

Beraz, **funtzioa $\mathbb{R} - \{\mathbf{1}\}$ tarteetan deribagarria da.**

b) Funtzioaren mutur erlatiboak zehaztuko ditugu.

$$f'(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} f''(x_0) < 0 & x_0 \ maximo\ erlatiboa \\ f''(x_0) > 0 & x_0 \ minimo\ erlatiboa \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - 8 & baldin \quad x < 1 \ bada \\ -4x + 8 & baldin \quad x > 1 \ bada \end{cases}$$

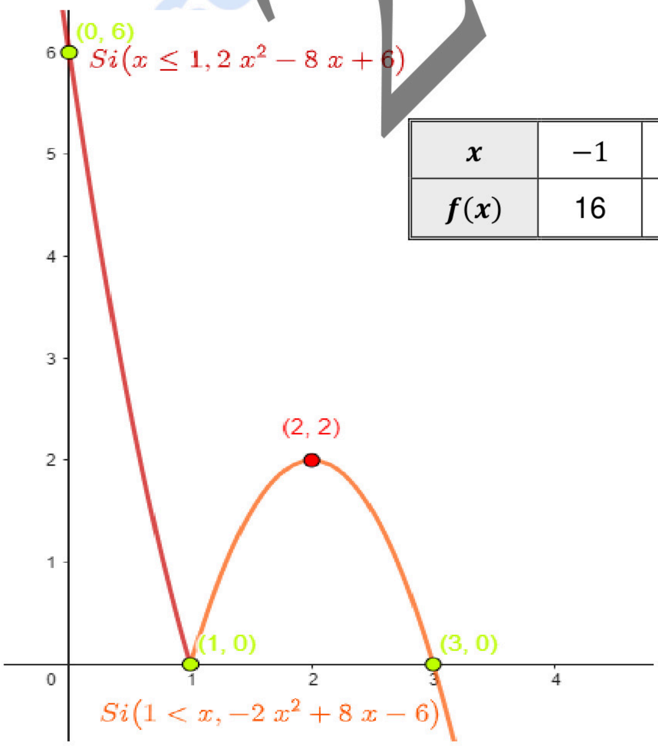
- $\boldsymbol{x < 1}$ **bada**
  - $f'(x) = 4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2$ y $2 > 1 \Rightarrow (-\infty, \ \mathbf{1})$ **tartean ez dago ez maximo ezta minimo erlatiborik ere.**

- $\boldsymbol{x > 1}$ **bada**
  - $f'(x) = -4x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2$ puntu singularra da.
  - $f''(x) = -4 \Rightarrow f''(2) = -4 < 0 \Rightarrow$ x = 2 puntuan maximo erlatiboa dago.
  - $y = f(2) = 2 \Rightarrow (x, y) = (\mathbf{2}, \ \mathbf{2})$ **maximo erlatiboa.**

- $\boldsymbol{x = 1}$ **bada**

  $(\mathbf{1}, \ \mathbf{1})$ **minimo erlatibo bat da,** nahiz eta deribagarria ez izan puntu horretan (jarraia da eta lehenengo deribatuaren zeinua aldatzen du puntu horretan).

c) Funtzioaren adierazpen grafikoa egingo dugu.



$\boldsymbol{x}$	-1	0	1	2	3	4
$\boldsymbol{f(x)}$	16	6	0	2	0	-6

CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

BLOKEA: PROBABILITATEA

A.3. *Probabilitate bat kalkulatzea, zuhaitz-diagramaren bidez edo probabilitate osoaren bidez.*

$\boldsymbol{B_C = \{\ CARLOSEK\ BATEKO\ BAT\ \}}$ $\boldsymbol{E_C = \{\ CARLOSEK\ ERREGE\ BAT\ \}}$

$B_{C1} = \{CARLOSEN\ LEHEN\ KARTA\ BATEKO\ BAT\ DA\}$ $E_{C1} = \{CARLOSEN\ LEHEN\ KARTA\ ERREGE\ BAT\ DA\}$

$B_{C2} = \{CARLOSEN\ BIGARREN\ KARTA\ BATEKO\ BAT\ DA\}$ $E_{C2} = \{CARLOSEN\ BIGARREN\ KARTA\ ERREGE\ BAT\ DA\}$

$\boldsymbol{B_L = \{LUCÍAK\ BATEKO\ BAT\}}$ $\boldsymbol{E_L = \{\ LUCÍAK\ ERREGE\ BAT\}}$

a) Carlosek bi bateko izateko probabilitatea kalkulatuko dugu.

$$\boldsymbol{P(CARLOSEK\ BI\ BATEKO)} = P(B_C \cap B_C) = P(B_{C1}) \cdot P(B_{C2} / B_{C1}) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \boldsymbol{\frac{3}{14}}$$

b) Carlosek bateko bat eta errege bat izateko probabilitatea kalkulatuko dugu.

$$\boldsymbol{P(CARLOSEK\ BATEKO\ BAT\ ETA\ ERREGE\ BAT)} = P(B_C \cap E_C) =$$

$$= P(B_{C1}) \cdot P(E_{C2} / B_{C1}) + P(E_{C1}) \cdot P(B_{C2} / E_{C1}) = \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \boldsymbol{\frac{4}{7}}$$

c) Kalkulatuko dugu Lucíak bateko bat eta Carlosek bi errege ez izateko probabilitatea. Lehenik Karlosek jasotzen dituenez kartak, Carlosek bi errege ez ditzan eta Lucíak bateko bat jaso dezan karten sekuentzia honako hau izango da:

Carlosek $B_{C1} \cap B_{C2}$ edo $B_{C1} \cap E_{C2}$ edo $E_{C1} \cap B_{C2}$ jasotzea eta, gero, Lucíak bateko bat.

$$\boldsymbol{P(LUCÍAK\ BATEKO\ BAT\ eta\ CARLOSEK\ BI\ ERREGE\ EZ)} =$$

$$= P(B_{C1} \cap B_{C2})\ P(B_L / (B_{C1} \cap B_{C2})) + P(B_{C1} \cap E_{C2})\ P(B_L / (B_{C1} \cap E_{C2})) +$$

$$+ P(E_{C1} \cap B_{C2})\ P(B_L / (E_{C1} \cap B_{C2})) =$$

$$= \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{14} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \boldsymbol{\frac{5}{14}}$$

d) Lucíak errege bat izateko probabilitatea kalkulatuko dugu.

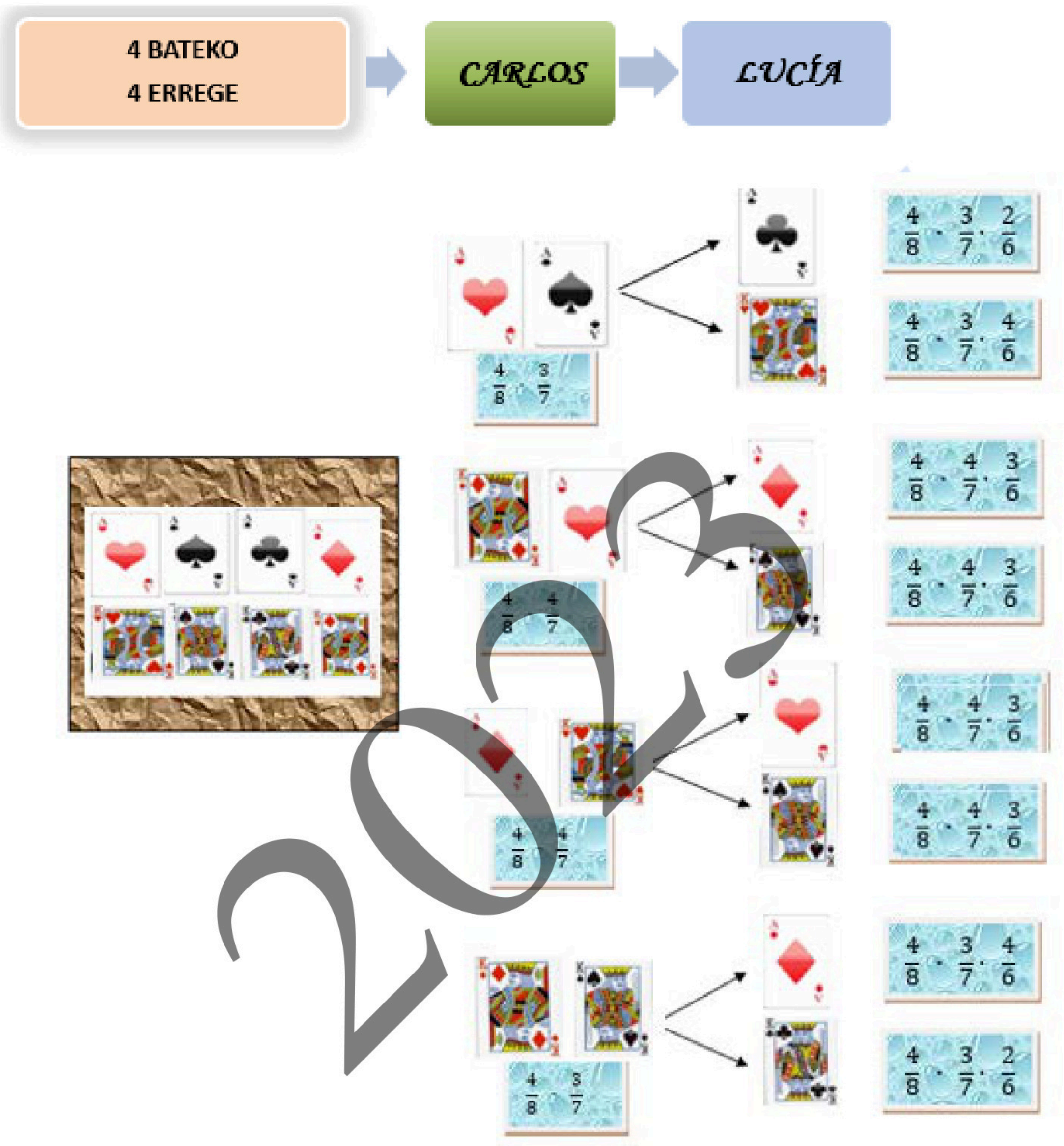
$$\boldsymbol{P(LUCÍAK\ ERREGE\ BAT)} = P(E_L) =$$

$$= P(B_{C1} \cap B_{C2}) \cdot P(E_L / (B_{C1} \cap B_{C2})) + P(B_{C1} \cap E_{C2}) \cdot P(E_L / (B_{C1} \cap E_{C2})) +$$

$$+ P(E_{C1} \cap B_{C2}) \cdot P(E_L / (E_{C1} \cap B_{C2})) + P(E_{C1} \cap E_{C2}) \cdot P(E_L / (E_{C1} \cap E_{C2})) =$$

$$= \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

BESTE MODU BAT



$$a)\ P(CARLOSEK\ BI\ BATEKO) = \frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7} = \mathbf{\frac{3}{14}}$$

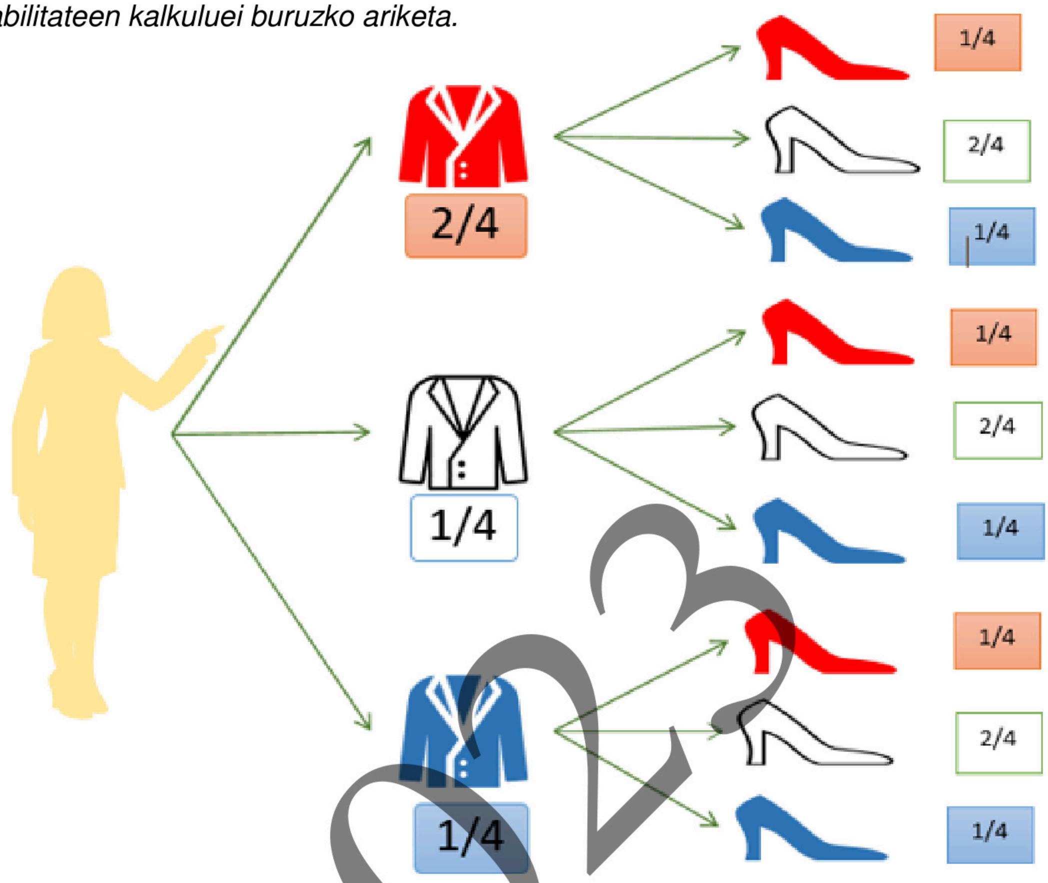
$$b)\ P(CARLOSEK\ BATEKO\ BAT\ eta\ ERREGE\ BAT) = \frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7} + \frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7} = \mathbf{\frac{4}{7}}$$

$$c)\ P\big(LUCÍAK\ BATEKO\ BAT\ eta\ CARLOSEK\ BI\ ERREGE\ EZ\big) =$$

$$= \frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6} + \frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} + \frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} = \mathbf{\frac{5}{14}}$$

$$d)\ P\big(LUCÍAK\ ERREGE\ BAT\big) = \frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6} + \frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} + \frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} + \frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

B.3. *Probabilitateen kalkuluei buruzko ariketa.*



a) Traje gorri bat eta zapata zuriak janzteko probabilitatea kalkulatuko dugu:

$$\boldsymbol{P(traje\ gorria\ eta\ zapata\ zuriak)} = \frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

b) Guztiz zuriz jantzita ez joateko probabilitatea kalkulatuko dugu:

$$\boldsymbol{P(guztiz\ zuriz\ jantzita\ ez\ joatea)} = 1 - P(guztiz\ zuriz\ jantzita\ joatea) = 1 - \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4} =$$

$$= 1 - \frac{1}{8} = \boldsymbol{\frac{7}{8}}$$

c) Zapata urdinak janzteko probabilitatea kalkulatuko dugu:

$$\boldsymbol{P(zapatak\ urdinak\ janztea)} = \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{4}{16} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

d) Zapata urdinak edo zuriak janzteko probabilitatea kalkulatuko dugu:

$$\boldsymbol{P(zapata\ urdinak\ edo\ zuriak\ janztea)} = 1 - P(zapata\ gorriak) =$$

$$= 1 - \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} = \boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

e) Guztiz kolore berberaz jantzita joateko probabilitatea kalkulatuko dugu:

$$\boldsymbol{P(guztiz\ kolore\ berberaz\ jantzita\ joatea)} =$$

$$= P(guztiz\ gorriz\ jantzita\ ) + P(guztiz\ zuriz\ jantzita) + P(guztiz\ urdinez\ jantzita) =$$

$$= \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4} \quad + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4} \quad + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} \quad = \quad \boldsymbol{\frac{5}{16}}$$

f) Zapata gorriak eramateko probabilitatea kalkulatuko dugu, jakinda ez dagoela guztiz kolore berberaz jantzita.

$$\boldsymbol{P\ (zapata\ gorriak\ /\ ez\ dago\ guztiz\ kolore\ berberaz\ jantzita\ )} =$$

$$= \frac{P(zapata\ gorriak\ \cap\ ez\ dago\ guztiz\ kolore\ berberaz\ jantzita\ )}{P(\ ez\ dago\ guztiz\ kolore\ berberaz\ jantzita\ )} =$$

$$= \frac{P(jantzi\ zuria\ \cap zapata\ gorriak) + P(\ jantzi\ urdina \cap zapata\ gorriak)}{1 - P(guztiz\ kolore\ berberaz\ jantzita\ egotea)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}{1 - \frac{5}{16}} = \frac{\frac{2}{16}}{\frac{11}{16}} = \boldsymbol{\frac{2}{11}}$$

BLOKEA: INFERENTZIA ESTATISTIKOA

A.4. *Laginen batezbestekoaren banaketari buruzko ariketa. Batezbestekorako tarte bereizgarria.*

Astean kirola egiteko erabiltzen duten ordu kopurua: $X \equiv \mathcal{N}\,(\mu,\ \sigma\,)$, non $\mu = 8$; $bariantza = 7{,}29$

36 tamainako zorizko lagin sinple batetik:

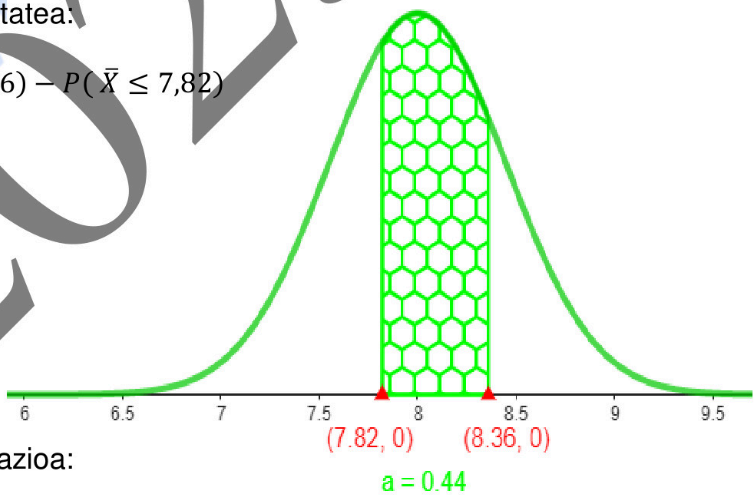
a) Adieraziko dugu zein den laginaren batezbestekoaren banaketa, $\bar{X}$.

- $bariantza = \sigma^2 = 7{,}29 \Rightarrow\ \sigma = \sqrt{7{,}29} = 2{,}7$ eta $\mu = 8\ \ \Rightarrow \boldsymbol{X \equiv\ \mathcal{N}\,(8,\quad 2{,}7\,)}$
- $X \equiv\ \mathcal{N}\,(8,\quad 2{,}7\,)\ \Rightarrow\ \bar{X} \equiv\ \mathcal{N}\left(\mu,\ \ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(8,\ \ \frac{2{,}7}{\sqrt{36}}\right) = \mathcal{N}\,(8,\quad 0{,}45\,) \Rightarrow$

$$\boldsymbol{\bar{X} \equiv \mathcal{N}\,(8,\quad 0{,}45\,)}$$

b) Kalkulatuko dugu astean kirola egiteko erabiltzen duten batez besteko ordu kopurua 7,82 eta 8,36 artean egoteko probabilitatea:

$P(7{,}82 \leq \bar{X}\ \leq 8{,}36) = P(\bar{X}\ \leq 8{,}36) - P(\bar{X} \leq 7{,}82)$



- X aldagaiaren tipifikazioa:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} = \frac{\bar{X} - 8}{0{,}45} \Rightarrow\ \boldsymbol{\bar{X} = 0{,}45\,Z + 8}$$

- $P(\bar{X}\ \leq 8{,}36) = P(\,0{,}45\,Z + 8 \leq 8{,}36\,) = P\left(Z \leq \frac{8{,}36-8}{0{,}45}\right) = P(Z \leq 0{,}8) = 0{,}7881$
- $P(\,\bar{X} \leq 7{,}82) = P(\,0{,}45\,Z + 8 \leq 7{,}82\,) = P(Z \leq -0{,}4) = P(Z \geq 0{,}4) =$

$$= 1 - P(Z \leq 0{,}4)\quad = 1 - 0{,}6554 =\ \ 0{,}3446$$

Beraz**:**

$\boldsymbol{P(7{,}82 \leq \bar{X}\ \leq 8{,}36)} = P(\bar{X}\ \leq 8{,}36) - P(\bar{X}\ \leq 7{,}82\,) = 0{,}7881 - 0{,}3446 = \boldsymbol{0{,}4435}$

$\Rightarrow \%\ \boldsymbol{44{,}35}$

c) Zehaztuko dugu zein den $\bar{X}$ laginaren batezbestekoaren banaketan % 99rako tarte bereizgarria.

- Badakigu $\bar{X} \equiv \mathcal{N}\,(8, \quad 0{,}45\,)$ dela.

$$\%\,99rako\ tarte\ bereizgarria\ (\,8-e\,,\quad 8+e\,)\ da,\ baldin\ P(\,8-e\ \leq\ \bar{X} \leq\ 8\ +\ e\,) =\ 0{,}99\ bada$$

$$\mathrm{P}(\,8-\mathrm{e}\ \leq\ \bar{X}\ \leq 8\ +\ \mathrm{e}\,) =\ 0{,}99\ \Rightarrow\ \mathrm{P}(\,\bar{X}\ \leq\ 8+\mathrm{e}\,) - \mathrm{P}(\,\bar{X} \leq\ 8 -\ \mathrm{e}\,)\ =\ 0{,}99\ \Rightarrow$$

- TIPIFIKAZIOA**:**

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} = \frac{\bar{X}-8}{0{,}45} \Rightarrow \bar{X} = 0{,}45\,Z + 8$$

- $P(\,\bar{X}\ \leq\ 8+e\,) = P(\,0{,}45\,Z + 8 \leq 8 + e\,) = P(0{,}45\,Z\ \leq e\,) =$

$$= P\left(Z \leq \frac{e}{0{,}45}\right)$$

- $P(\,\bar{X}\ \leq\ 8-e\,) = P(\,0{,}45\,Z + 8 \leq\ 8 - e\,) = P(\,0{,}45\,Z\ \leq -e\,) =$

$$= P\left(Z \leq \frac{-e}{0{,}45}\right)\ =\ 1 - P\left(Z \leq \frac{e}{0{,}45}\right)$$

$$\Rightarrow\ \mathrm{P}(\,8-\mathrm{e}\ \leq\ \bar{X}\ \leq\ 8\ +\ \mathrm{e}\,) = P\left(Z \leq \frac{e}{0{,}45}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{e}{0{,}45}\right)\right] = 0{,}99\ \Rightarrow$$

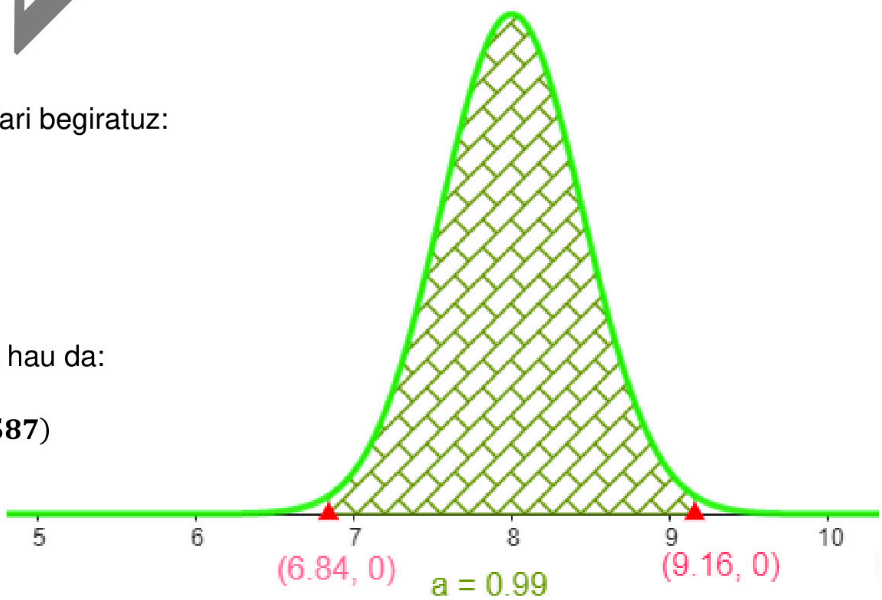
$$\Rightarrow\ 2\,P\left(Z \leq \frac{e}{0{,}45}\right) - 1 = 0{,}99\ \Rightarrow\ P\left(Z \leq \frac{e}{0{,}45}\right) = 0{,}995$$

Orduan, banaketa normalaren taulari begiratuz:

$$\frac{e}{0{,}45} = 2{,}575\ \Rightarrow\ \boldsymbol{e = 1{,}15875}$$

Beraz, % 99rako tarte bereizgarria hau da:

$$(8-\mathrm{e}\,,\quad 8+e) = (\mathbf{6{,}8412}\,,\quad \mathbf{9{,}1587})$$



B. 4. *Populazio baten proportziorako konfiantza-tartea kalkulatzea eta errore maximo onargarria.*

a) Irakasgai guztiak gainditzen dituzten unibertsitateko ikasleen portzentajea zenbatetsiko dugu, % 97ko konfiantza-mailaz.

- Laginaren tamaina handia bada, hau izango da laginaren proportzioaren banaketa:

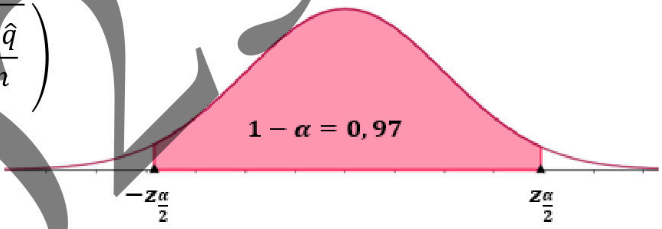
$$\mathcal{N}\left(\mu = p\,, \sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

- 400 ikasleko laginean, 160 ikaslek gainditu dituzte irakasgai guztiak; beraz, hau da irakasgai guztiak gainditu dituzten unibertsitateko ikasleen laginaren proportzioa**:**

$$\boldsymbol{\hat{p} = \frac{160}{400} = 0,4}$$

- Irakasgai guztiak gainditu dituzten unibertsitateko ikasleen proportziorako konfiantza-tartea, % 97eko konfiantza-mailaz, hau izango da:

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\ ,\quad \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$$



- $z_{\frac{\alpha}{2}}$ kalkulatuko dugu:

Konfiantza-maila : $n_c = 0,97 = 1-\alpha \Rightarrow \alpha = 0,03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,015 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,17$

$$P\left(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,015 \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,015 \Rightarrow P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,985 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,17$$

- $\hat{p} = 0,4 \Rightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,6 \Rightarrow$

$$\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = \sqrt{\frac{0.4\ \cdot 0,6}{400}} = 0,0245$$

- Orduan:

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\ ,\quad \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) = (0,4 - 2,17\cdot 0,0245,\ \ 0,4 + 2,17\cdot 0,0245) =$$

$$= (\mathbf{0,3468},\quad \mathbf{0,4531})$$

Hau da, irakasgai guztiak gainditu dituzten unibertsitateko ikasleen portzentajea % 34,68 eta % 45,31 artean dago, % 97ko konfiantza-mailaz.

b) Konfiantza-maila horretarako errore maximo onargarria kalkulatuko dugu:

Errore maximo onargarria, proportzioa % 97ko konfiantza-mailaz zenbatesteko, hau izango da;

$$\boldsymbol{e_m} = Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2{,}17 \cdot 0{,}0245 = \mathbf{0{,}05315} \;\; \Rightarrow \% \, \mathbf{5{,}31}$$

BESTE MODU BAT

a) atala egin ondoren, errore maximo onargarria konfiantza-tartearen zabaleraren erdia da, hau da:

$$e_m = \frac{0{,}4531 - 0{,}3468}{2} = 0{,}05315 \Rightarrow \% \, \mathbf{5{,}31}$$

c) Kalkulatuko dugu zer tamaina izan behar duen laginak errore maximo onargarria 0,04 izan dadin, % 97ko konfiantza-mailaz.

$$e_m = 0{,}04 = Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2{,}17 \cdot \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0{,}6}{n}} \implies 0{,}04 \cdot \sqrt{n} = 2{,}17 \cdot \sqrt{0.4 \cdot 0{,}6} \implies$$

$$\implies \sqrt{n} = 2{,}17 \cdot \frac{\sqrt{0{,}24}}{0{,}04} \implies n = \frac{2{,}17^2 \cdot 0{,}24}{0{,}04^2} = 706{,}33 \implies \boldsymbol{n} = \mathbf{707}$$

Beraz, errore maximo onargarria 0,04 baino handiago izan ez dadin, laginak gutxienez 707 ikasle izan behar ditu, % 97ko konfiantza-mailaz.

MATEMATICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

1. El examen está compuesto de ocho ejercicios.
2. ***De estos ocho ejercicios se tiene que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.***
3. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.
4. El examen se evaluará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
5. Cada ejercicio se valorará entre 0 y 2,5 puntos.
6. En aquellas cuestiones en las que no se especifique el método de resolución que se ha de aplicar, se admitirá cualquier forma de resolverlo correctamente.

ASPECTOS QUE MERECEN VALORACIÓN POSITIVA

- Los planteamientos correctos, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
- La correcta utilización de conceptos, vocabulario y notación científica.
- El conocimiento de técnicas específicas de aplicación directa para el cálculo y/o interpretación de datos numéricos y gráficos.
- La terminación completa del ejercicio y la exactitud del resultado.
- Se considerarán igualmente válidas dos soluciones que solo se diferencien en el grado de exactitud empleado en los cálculos numéricos.
- No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual.
- La claridad de las explicaciones de los pasos seguidos.
- Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, …, que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución.
- La pulcritud de la presentación, y cualquier otro aspecto que refleje la madurez que cabe esperar de un estudiante que aspira a entrar en la universidad.

ASPECTOS QUE MERECEN VALORACIÓN NEGATIVA

- Los planteamientos incorrectos.
- La confusión de conceptos.
- La abundancia de errores de cálculo (por ser indicativa de deficiencias de orden básico).
- Los errores aislados, cuando indican falta de reflexión crítica o de sentido común (por ejemplo, decir que la solución a tal problema es -3,7 frigoríficos, o que cierta probabilidad vale 2,5).
- Los errores aislados, cuando conducen a problemas más sencillos que los inicialmente propuestos.
- La ausencia de explicaciones, en particular del significado de las variables que se están utilizando.
- Los errores ortográficos graves, el desorden, la falta de limpieza, la mala redacción y cualquier otro aspecto impropio de un estudiante que aspira a entrar en la universidad.

CRITERIOS PARTICULARES PARA CADA UNO DE LOS PROBLEMAS

BLOQUE: ÁLGEBRA

Problema A.1 *(hasta 2,5 puntos)*

a. 1 punto

- Determinar las dimensiones de las matrices *A, B, C, P* y *R*, **0,2 puntos**.
- Dimensión de la matriz $A \cdot P \cdot B^t$, **0,4 puntos.**
- Dimensión de la matriz $Q \cdot A \cdot C$, **0,4 puntos.**

b. 1,5 puntos. Resolución de la ecuación matricial.

- Determinar la matriz X, **0,3 puntos.**
- Cálculo la matriz inversa de A.
  - Cálculo del determinante de la matriz A, **0,1 puntos.**
  - Determinar la matriz $Adj\,A$ **, 0,2 puntos.**
  - Calcular la matriz A^{-1}, **0,25 puntos.**
- Concreción de la matriz X.
  - Calcular la matriz $2B \cdot C^t$, **0,25 puntos.**
  - Calcular la matriz $A^t + 2B \cdot C^t$, **0,15 puntos.**
  - Cálculo de la matriz X, **0,25 puntos.**

Problema B.1 ***(hasta 2,5 puntos)***

a. 2,1 puntos

- Concretar la función objetivo, **0,1 puntos.**
- Determinar las restricciones, **0,2 puntos.**
- Determinar y representar la región factible.
  - Representación de cada restricción, 0,1 puntos, por lo tanto, **0,3 puntos.**
  - Determinar la región factible, **0,3 puntos.**
- Concretar los vértices de la región factible.
  - Vértice A, **0,1 puntos.**
  - Vértice B, **0,1 puntos.**
  - Vértice C, **0,1 puntos.**
  - Vértice D, **0,1 puntos.**
- Valorar la función en los vértices, **0,3 puntos.**
- Determinar los máximos **0,2 puntos.**
- Decidir, razonadamente, cuál es el máximo, **0,2 puntos.**
- Valorar la función en ese punto máximo, **0,1 puntos.**

b. 0,4 puntos

- Determinar, razonadamente, que el punto $(1, \quad 1)$ está dentro de la región factible, **0,2 puntos.**
- Concluir que no es conveniente, **0,2 puntos.**

BLOQUE: ANÁLISIS

Problema A.2 ***(hasta 2,5 puntos)***

a. 0,8 puntos. Determinar los valores de los parámetros a, b y c.

- Cálculo de la primera derivada, **0,1 puntos.**
- (0, 0) es un punto de la función, **0,1 puntos.**
- (1, −1) es un punto de la función, **0,2 puntos.**
- En el punto (1, 1) la función tiene un mínimo relativo, **0,2 puntos.**
- Resolución del sistema que se crea, **0,2 puntos.**

b. 1 punto

- Cálculo de los extremos relativos de la función, **0,1 puntos.**
- Concretar los máximos y los mínimos relativos de la función, **0,2 puntos.**
- Determinar los puntos de inflexión.
    - Segunda derivada, **0,1 puntos.**
    - Concretar el punto de inflexión, **0,2 puntos.**
- Representación gráfica de la función, **0,4 puntos.**

c. 0,7 puntos. El área de la superficie limitada por la función, el eje *OX*, y las dos rectas.

- Determinar la integral definida, **0,2 puntos.**
- Cálculo de la integral definida **0,2 puntos.**
- Aplicar Barrow, **0,2 puntos.**
- Determinar el área**, 0,1 puntos.**

Problema B.2 ***(hasta 2,5 puntos)***

a. 1,7 puntos

- Estudio de la continuidad.
  - Continuidad en los intervalos $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, **0,3 puntos.**
  - Definir la continuidad de una función en un punto, **0,1 puntos.**
  - Estudio de la continuidad de la función en el punto $x = 1$.
    - Cálculo de los límites laterales, **0,2 puntos.**
    - Concretar el valor de $f(1)$, **0,1 puntos.**
    - Concluir como es la función en el punto $x = 1$, **0,1 puntos.**
- Estudio de la derivabilidad**.**
  - Derivabilidad en los intervalos $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, **0,3 puntos.**
  - Definir la derivabilidad de una función en un punto, **0,2 puntos.**
  - Estudio de la derivabilidad de la función en el punto $x = 1$.
    - Cálculo de la derivada de la función, **0,1 puntos**
    - Cálculo de las derivadas laterales, **0,2 puntos.**
    - Concluir cómo es la función en el punto $x = 1$, **0,1 puntos.**

b. 0,4 puntos. Estudio de los extremos relativos de la función.

- Definición de los máximos y los mínimos relativos de una función, **0,1 puntos.**
- Cálculo de la primera derivada de la función, **0,1 puntos.**
  - Si $x \leq 1$, concreción de los máximos y los mínimos relativos, **0,1 puntos.**
  - Si $x > 1$, concreción de los máximos y los mínimos relativos, **0,1 puntos.**

c. 0,4 puntos.

- Representación gráfica de la función.
  - Si $x \leq 1$, representación gráfica de la función, **0,2 puntos.**
  - Si $x > 1$, representación gráfica de la función, **0,2 puntos.**

BLOQUE: PROBABILIDAD

Problema A.3 *(hasta 2,5 puntos)*

1ª FORMA (ANALITICAMENTE)

a. 0,4 puntos

- Determinar qué tiene que calcular, **0,1 puntos.**
- Expresar la fórmula de la probabilidad $P(A_C \cap A_C)$, **0,1 puntos**.
- El cálculo de la probabilidad, **0,2 puntos.**

b. 0,6 puntos

- Determinar qué tiene que calcular, **0,1 puntos.**
- Expresar la fórmula de la probabilidad total, **0,3 puntos.**
- El cálculo de la probabilidad, **0,2 puntos.**

c. 0,7 puntos

- Expresar qué tiene que recibir Carlos, **0,2 puntos.**
- Expresar qué probabilidades tiene que calcular, **0,2 puntos.**
- El cálculo de la probabilidad, **0,3 puntos.**

d. 0,8 puntos

- Expresar la fórmula de la probabilidad total, **0,4 puntos.**
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,4 puntos.**

2ª FORMA (ATRAVÉS DE UN DIAGRAMA DE ÁRBOL)

a. 0,4 puntos.

- Hacer un diagrama de árbol, **0,2 puntos**.
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,2 puntos.**

b. 0,6 puntos.

- Hacer un diagrama de árbol, **0,2 puntos.**
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,4 puntos.**

c. 0,7 puntos.

- Hacer un diagrama de árbol, **0,2 puntos.**
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,5 puntos.**

d. 0,8 puntos.

- Hacer un diagrama de árbol, **0,2 puntos.**
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,6 puntos.**

NOTA: Se valorará **en cada apartado** la elaboración de un diagrama de árbol tal y como se indica en los criterios de corrección, en el caso de no tener la puntuación total del apartado.

Problema B.3 ***(hasta 2,5 puntos)***

a. 0,3 puntos

- Hacer un diagrama de árbol o algún esquema, **0,1 puntos.**
- Determinar qué hay que calcular, **0,1 puntos.**
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,1 puntos.**

b. 0,4 puntos

- Hacer un diagrama de árbol o algún esquema, **0,1 puntos.**
- Determinar qué hay que calcular, **0,1 puntos.**
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,2 puntos.**

c. 0,4 puntos

- Hacer un diagrama de árbol o algún esquema, **0,1 puntos.**
- Determinar qué hay que calcular, **0,1 puntos.**
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,2 puntos.**

d. 0,5 puntos

- Hacer un diagrama de árbol o algún esquema, **0,1 puntos.**
- Determinar qué hay que calcular, **0,2 puntos.**
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,2 puntos.**

e. 0,4 puntos

- Hacer un diagrama de árbol o algún esquema, **0,1 puntos.**
- Determinar qué hay que calcular, **0,1 puntos.**
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,2 puntos.**

f. 0,5 puntos

- Hacer un diagrama de árbol o algún esquema, **0,1 puntos.**
- Expresar la fórmula de la probabilidad condicionada, **0,2 puntos.**
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,2 puntos.**

NOTA: Se valorará **en cada apartado** la elaboración de un diagrama de árbol tal y como se indica en los criterios de corrección, en el caso de no tener la puntuación total del apartado.

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

Problema A.4 *(hasta 2,5 puntos)*

a. 0,75 puntos

- El planteamiento del problema, **0,25 puntos.**
- Distribución de la media muestral, **0,5 puntos.**

b. 1 punto

- El planteamiento del problema, **0,15 puntos**.
- Tipificación de la variable, **0, 25 puntos.**
- Concretar la probabilidad $P(\bar{X} \leq 8{,}36)$, **0,25 puntos.**
- Concretar la probabilidad $P(\bar{X} \leq 7{,}82)$, **0,25 puntos.**
- Cálculo de la probabilidad pedida**, 0,1 puntos.**

c. 0,75 puntos

- Expresar cómo se determina el intervalo característico, **0,3 puntos.**
- Determinar el valor en la tabla de la distribución normal, **0,2 puntos.**
- Concretar el intervalo característico, **0,25 puntos.**

Problema B.4 ***(hasta 2,5 puntos)***

a. 1,25 puntos

- Indicar qué sabe qué es la proporción muestral, **0,2 puntos.**
- Determinar la fórmula del intervalo de confianza para la proporción, **0,25 puntos.**
- Determinar $z_{\frac{\alpha}{2}}$, **0,3 puntos.**
- El intervalo de confianza pedido, **0,35 puntos.**
- Determinar el porcentaje pedido, **0,15 puntos.**

b. 0,5 puntos

- Indicar la fórmula del error o expresar qué es el error máximo admisible, **0,2 puntos.**
- Cálculo del error, **0,3 puntos.**

c. 0,75 puntos

- Indicar la fórmula del error, **0,25 puntos.**
- Cálculo del tamaño de la muestra, **0,5 puntos.**

SOLUCIONES

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1. *Cálculo matricial. Cálculo de la matriz inversa. Resolución de una ecuación matricial.*

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Razonamos que dimensión deben tener las matrices P y Q para que los productos $(A \cdot P \cdot B^t)$ y $(Q \cdot A \cdot C)$ den como resultado una matriz cuadrada.

- $A \in \mathcal{M}_{2X2}$, $B, C \in \mathcal{M}_{2X3}$, $P \in \mathcal{M}_{mXn}$, $Q \in \mathcal{M}_{rXs}$
- $B \in \mathcal{M}_{2X3} \Rightarrow B^t \in \mathcal{M}_{3X2}$

- Determinamos la dimensión de la matriz: $A \cdot P \cdot B^t$
  - $A \cdot P \cdot B^t = (A \cdot P) \cdot B^t$
    - $\exists A \cdot P \Rightarrow m = 2 \Rightarrow A \cdot P \in \mathcal{M}_{2Xn}$
    - $\exists (A \cdot P) \cdot B^t \Rightarrow n = 3 \Rightarrow (A \cdot P) \cdot B^t \in \mathcal{M}_{2X2}$
  - Por lo tanto, si $\boldsymbol{m = 2}$ **,** $\boldsymbol{n = 3 \Longrightarrow \exists A \cdot P \cdot B^t}$ **y es una matriz cuadrada de orden 2.**

- Determinamos la dimensión de la matriz: $Q \cdot A \cdot C$
  - $Q \cdot A \cdot C = (Q \cdot A) \cdot C$
    - $\exists Q \cdot A \Rightarrow s = 2 \Rightarrow Q \cdot A \in \mathcal{M}_{rX2}$
    - $(Q \cdot A) \cdot C \in \mathcal{M}_{3X3} \Rightarrow r = 3$
  - Por lo tanto, si $\boldsymbol{r = 3}$, $\boldsymbol{s = 2 \Longrightarrow \exists Q \cdot A \cdot C}$ **y es una matriz cuadrada de orden 3.**

b) Resolvemos la ecuación matricial: $A \cdot X - 2B \cdot C^t = A^t$

$$A \cdot X - 2B \cdot C^t = A^t \quad \Rightarrow \quad A \cdot X = A^t + 2B \cdot C^t \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{X = A^{-1} \cdot (A^t + 2B \cdot C^t)}$$

- Cálculo de la matriz inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ (Adj\ A)^t$$

- $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 2$
- Adjuntos:

$A_{11} = (-1)^2 \cdot 4 = 4$ $\qquad$ $A_{21} = (-1)^3\, 2 = -2$

$A_{12} = (-1)^3 \cdot -3 = 3$ $\qquad$ $A_{22} = (-1)^4 \cdot -1 = -1$

Luego:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\ A)^t = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- $2B \cdot C^t = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

- $A^t + 2B \cdot C^t = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 16 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -13 \\ 18 & 20 \end{pmatrix}$

Por lo tanto:

$$X = A^{-1} \cdot (A^t + 2B \cdot C^t) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -13 \\ 18 & 20 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -20-36 & -52-40 \\ -15-18 & -39-20 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -56 & -92 \\ -33 & -59 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-28} & \boldsymbol{-46} \\ \boldsymbol{-33/2} & \boldsymbol{-59/2} \end{pmatrix}$$

B.1. *Problema de programación lineal con dos variables.*

	PRECIO	MATERIAL	TIEMPO	UNIDADES
MESA	20 €	4 €	2 h	x
SILLA	30 €	2 €	3 h	y

a) Realizamos el planteamiento y la resolución del problema.

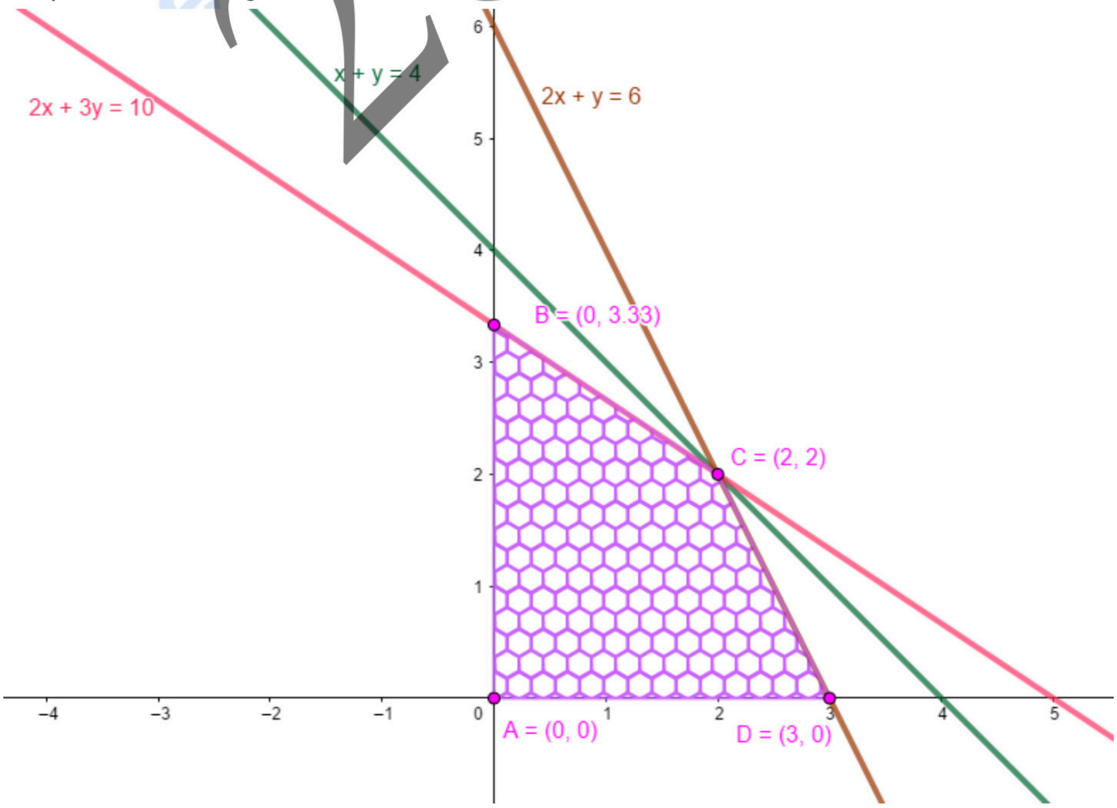
- La función objetivo es:

$$f(x,\quad y) = 20\,x + 30\,y$$

- Las restricciones son:

$$\begin{cases} x + y \le 4 \\ 2x + 3y \le 10 \\ 2x + y \le 6 \\ x \ge 0,\quad y \ge 0 \end{cases}$$

- En el plano XY, la región factible es:



- Cálculo del vértice B:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases} \Rightarrow \; 3x = 10 \;\; \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow B\left(0, \frac{10}{3}\right)$$

Por lo tanto, los vértices son:

$$A(0,0), \quad B\left(0, \frac{10}{3}\right), \quad C(2,2), \quad D(3,0)$$

- Calculamos los valores que toma la función objetivo en los vértices:
  - $f(A) = f(0,0) = 0$
  - $f(B) = f\left(0, \frac{10}{3}\right) = 100$
  - $f(C) = f(2,2) = 100$
  - $f(D) = f(3,0) = 60$

- La función obtiene el valor máximo en el punto $B\left(0, \frac{10}{3}\right)$ y en el punto $C(2,2)$, luego en todos los puntos del segmento $\overline{BC}$.
- Sin embargo, como el número de mesas y de sillas producidas tiene que ser un número natural, la solución se obtiene en el único punto de coordenadas naturales del segmento $\overline{BC}$, esto es, en el punto $C(2,2)$.
- Por lo tanto, **la empresa tiene que fabricar dos sillas y dos mesas al día para obtener el ingreso máximo que es 100 €.**

b) ¿Se puede fabricar diariamente 1 mesa y 1 silla?, ¿esto le conviene a la empresa?

El punto $(1,1)$ está dentro de la región factible luego verifica todas las restricciones, por lo que **sí es posible fabricar 1 mesa y 1 silla diariamente**, pero no es en este punto en el que se obtendría un ingreso máximo y, por lo tanto, **no será del interés de la empresa.**

BLOQUE: ANÁLISIS

A.2. *Características de una función. Cálculo de los valores de los parámetros de una función. Representación gráfica.*

a) Obtención del valor de los coeficientes *a, b* y *c*.

- La función pasa por el punto $(0,0) \Rightarrow g(0)=0 \Rightarrow c=0$

Por lo tanto, $\boldsymbol{g(x)=ax^3+bx}$

- La función pasa por el punto $(1, \ -1) \Rightarrow g(1)=-1 \Rightarrow a+b=-1$
- La función en $x=1$ tiene un mínimo relativo $\Rightarrow g'(1)=0$

$$g'(x)=3ax^2+b \Rightarrow g'(1)=0=3a+b \Rightarrow 3a+b=0$$

Por lo tanto:

$$\begin{cases} a+b=-1 \\ 3a+b=0 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{1}{2} \text{ y } b=\frac{-3}{2} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{g(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x}$$

b) Máximos, mínimos relativos, puntos de inflexión y representación gráfica.

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x$$

- La definición de un máximo y un mínimo relativo es:

$$\boxed{f'(x_0)=0 \Rightarrow \begin{cases} f''(x_0)<0 & (x_0,f(x_0)) \text{ máximo relativo} \\ f''(x_0)>0 & (x_0,f(x_0)) \text{ mínimo relativo} \end{cases}}$$

✓ $f'(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}$

✓ $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{3}{2}\cdot x^2-\frac{3}{2}=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$ puntos singulares

✓ $f''(x)=3x \Rightarrow$

$f''(-1)=-3<0 \Rightarrow (\mathbf{-1,\ 1})$ **Máximo relativo**

$f''(1)=3>0 \Rightarrow (\mathbf{1,-1})$ **Mínimo relativo**

- La definición de un punto de inflexión es:

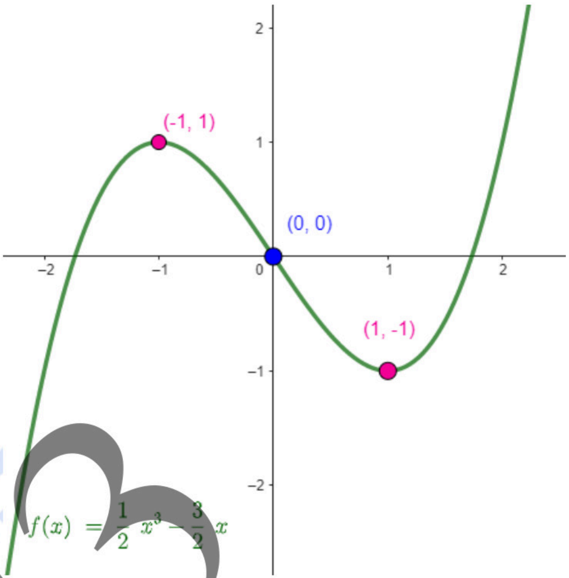
$$\boxed{f''(x_0)=0 \ \wedge \ f'''(x_0)\neq 0 \Rightarrow (x_0,f(x_0)) \ \textbf{punto de inflexión}}$$

✓ $f''(x) = 3x = 0 \Longrightarrow x = 0$

✓ $f'''(x) = 3 \Rightarrow f'''(0) = 3 \neq 0 \Rightarrow$

$(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ **Punto de inflexión**

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	1	0	-1	5

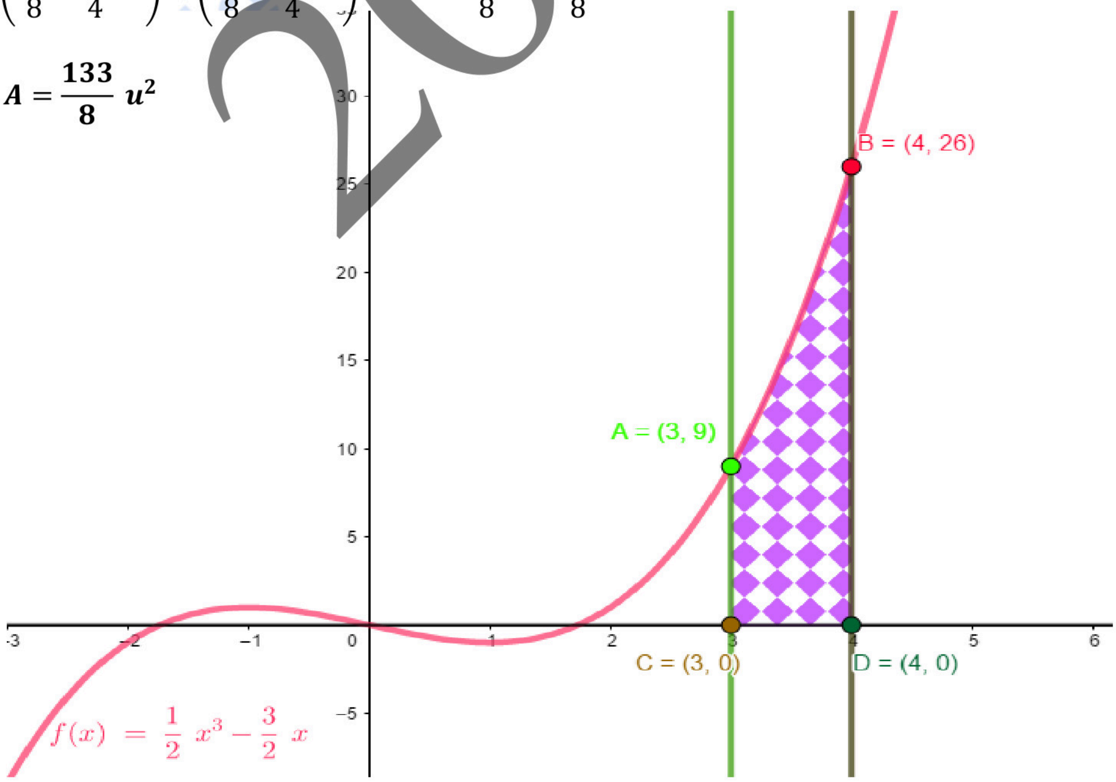


c) Calculamos el área limitada por el eje de abscisas *OX*, $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$, $x = 3$ y $x = 4$.

$$A = \int_3^4 \left[\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right) - 0\right] dx = \int_3^4 \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right) dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\right]_3^4 = \left[\frac{x^4}{8} - \frac{3}{4}x^2\right]_3^4 =$$

$$= \left(\frac{4^4}{8} - \frac{3}{4}4^2\right) - \left(\frac{3^4}{8} - \frac{3}{4}3^2\right) = 20 - \frac{27}{8} = \frac{133}{8}u^2$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A = \frac{133}{8}u^2}$$



B.2. *Continuidad y derivabilidad de una función. Representación gráfica.*

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8x + 6 & si\ x \leq 1 \\ -2x^2 + 8x - 6 & si\ x > 1 \end{cases}$$

a) Estudiamos la continuidad y derivabilidad de la función en $\mathbb{R}$.

CONTINUIDAD

- La función **es continua en** $\mathbb{R} - \{\mathbf{1}\}$ por definición: son polinomios.
- Estudio de la continuidad en $x = 1$.

$$f(x)\ \ continua\ en\ el\ punto\ \ x = 1 \iff \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$$

- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 2x^2 - 8x + 6\ = 0$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} -2x^2 + 8x - 6\ = 0$
- $f(1) = 0$

Entonces: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 0 \ \Rightarrow$ función **es continua en** $\boldsymbol{x = 1}$

Por lo tanto, **la función es continua en** $\mathbb{R}$.

DERIVABILIDAD

- La función es **derivable en** $\mathbb{R} - \{\mathbf{1}\}$ por definición: son polinomios.
- Estudio de la derivabilidad en $x = 1$.

$$f(x)\ derivable\ en\ el\ punto\ x = 1 \iff f'(1^-) = f'(1^+)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - 8 & si\ \ x < 1 \\ -4x + 8 & si\ \ x > 1 \end{cases}$$

- Calculamos las derivadas laterales en el punto $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{r} f'(1^-)\ \ = -4 \\ f'(1^+) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(1^-) \neq f'(1^+)$$

Luego, $\boldsymbol{f(x)}$ **no es derivable en el punto** $\boldsymbol{x = 1}$.

Por lo tanto, **la función es derivable en** $\mathbb{R} - \{\mathbf{1}\}$**.**

b) Determinamos los extremos relativos de la función.

$$f'(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} f''(x_0) < 0 & x_0 \ \text{máximo relativo} \\ f''(x_0) > 0 & x_0 \ \text{mínimo relativo} \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - 8 & si \ \ x < 1 \\ -4x + 8 & si \ \ x > 1 \end{cases}$$

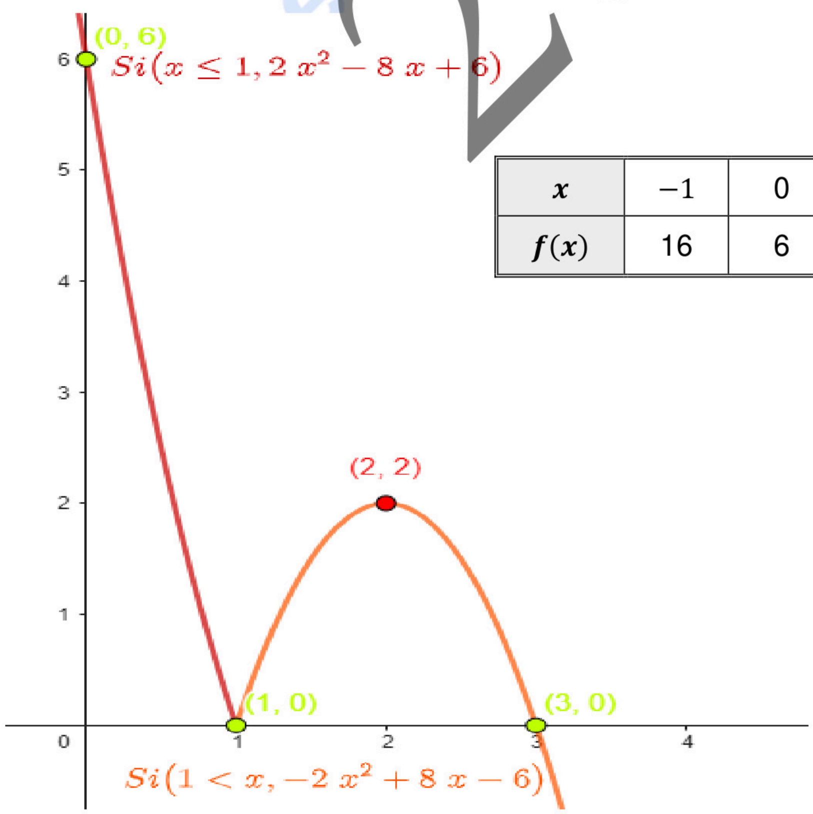
- Si $\boldsymbol{x < 1}$
  - $f'(x) = 4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2$ y $2 > 1 \Rightarrow$ **no hay ni máximos ni mínimos relativos en** $(-\infty, \ \mathbf{1})$.

- Si $\boldsymbol{x > 1}$
  - $f'(x) = -4x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2$ es un punto singular.
  - $f''(x) = -4 \ \Rightarrow f''(2) = -4 \ < 0 \ \Rightarrow$ en el punto $x = 2$ hay un máximo relativo.
  - $y = f(2) = \ 2 \ \Rightarrow \ (x, y) = (\mathbf{2}, \ \mathbf{2})$ **máximo relativo.**

- Si $\boldsymbol{x = 1}$

  $(\mathbf{1}, \ \mathbf{1})$ **es un mínimo relativo,** aunque la función no es derivable en ese punto (es continua y cambia el signo de la primera derivada en ese punto).

c) Representamos la gráfica de la función.



$\boldsymbol{x}$	-1	0	1	2	3	4
$\boldsymbol{f(x)}$	16	6	0	2	0	-6

BLOQUE: PROBABILIDAD

A.3. *Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse***,** *a través de un diagrama de árbol o la probabilidad total.*

$$\boldsymbol{A_C = \{\ CARLOS\ UN\ AS\ \}} \qquad \boldsymbol{R_C = \{\ CARLOS\ UN\ REY\ \}}$$

$$A_{C1} = \{LA\ PRIMERA\ CARTA\ \ DE\ CARLOS\ ES\ UN\ AS\} \qquad R_{C1} = \{LA\ PRIMERA\ CARTA\ DE\ CARLOS\ ES\ UN\ REY\}$$

$$A_{C2} = \{LA\ SEGUNDA\ CARTA\ \ DE\ CARLOS\ ES\ UN\ AS\} \qquad R_{C2} = \{LA\ SEGUNDA\ CARTA\ DE\ CARLOS\ ES\ UN\ REY\}$$

$$\boldsymbol{A_L = \left\{\ LUCÍA\ UN\ AS\ \right\}} \qquad \boldsymbol{R_L = \left\{\ LUCÍA\ UN\ REY\ \right\}}$$

a) Calculamos la probabilidad de que Carlos tenga dos ases.

$$\boldsymbol{P(CARLOS\ DOS\ ASES)} = P(A_C \cap A_C) = P(A_{C1}) \cdot P(A_{C2}\,/\,A_{C1}) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \boldsymbol{\frac{3}{14}}$$

b) Calculamos la probabilidad de que Carlos tenga un as y un rey.

$$\boldsymbol{P(CARLOS\ UN\ AS\ y\ UN\ REY)} = P(A_C \cap R_C) =$$

$$= P(A_{C1}) \cdot P(R_{C2}\,/\,A_{C1}) + P(R_{C1}) \cdot P(A_{C2}\,/\,R_{C1}) = \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \boldsymbol{\frac{4}{7}}$$

c) Calculamos la probabilidad de que Lucía tenga un as y Carlos no tenga dos reyes.

Como Carlos recibe las cartas en primer lugar, la secuencia de cartas para que Carlos no reciba dos reyes y Lucía reciba un as debe ser:

Carlos recibir $A_{C1} \cap A_{C2}$ ó $A_{C1} \cap R_{C2}$ ó $R_{C1} \cap A_{C2}$ y luego, Lucía un as.

$$\boldsymbol{P\left(LUCÍA\ UN\ AS\ y\ CARLOS\ \ DOS\ REYES\ NO\right)} =$$

$$= P(A_{C1} \cap A_{C2}) \cdot P(A_L\,/(A_{C1} \cap A_{C2})) + P(A_{C1} \cap R_{C2}) \cdot P(A_L\,/(A_{C1} \cap R_{C2})) +$$

$$+ P(R_{C1} \cap A_{C2}) \cdot P(A_L\,/(R_{C1} \cap A_{C2})) =$$

$$= \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{14} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \boldsymbol{\frac{5}{14}}$$

d) Calculamos la probabilidad de que Lucía tenga un rey.

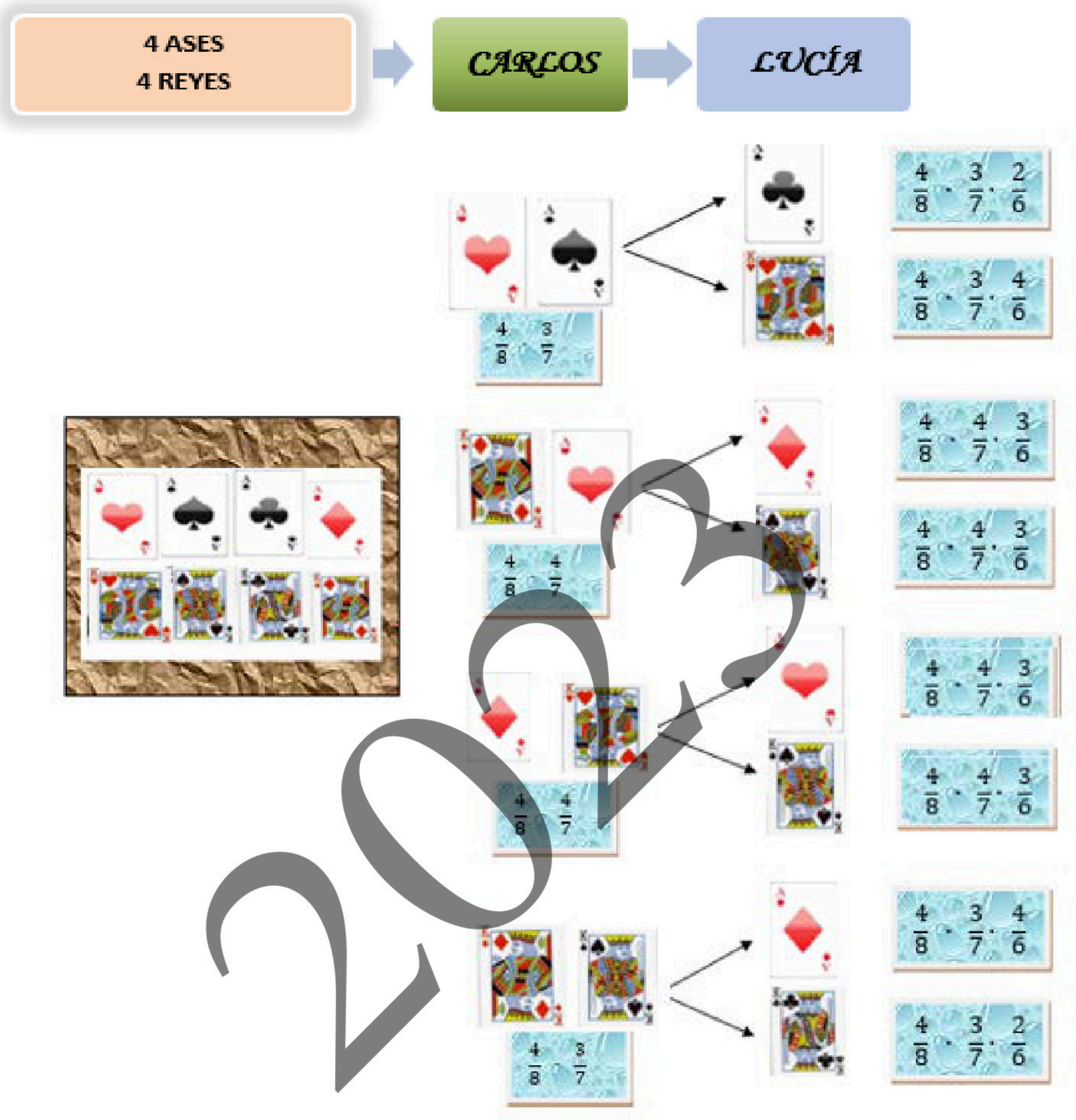
$$\boldsymbol{P\left(LUCÍA\ UN\ REY\ \right)} = P(R_L) =$$

$$= P(A_{C1} \cap A_{C2}) \cdot P(R_L\,/\,(A_{C1} \cap A_{C2})) + P(A_{C1} \cap R_{C2}) \cdot P(R_L\,/(A_{C1} \cap R_{C2})) +$$

$$+ P(R_{C1} \cap A_{C2}) \cdot P(R_L\,/\,(R_{C1} \cap A_{C2})) + P(R_{C1} \cap R_{C2}) \cdot P\left(R_L\,/\,(R_{C1} \cap R_{C2})\right) =$$

$$= \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

OTRA MANERA



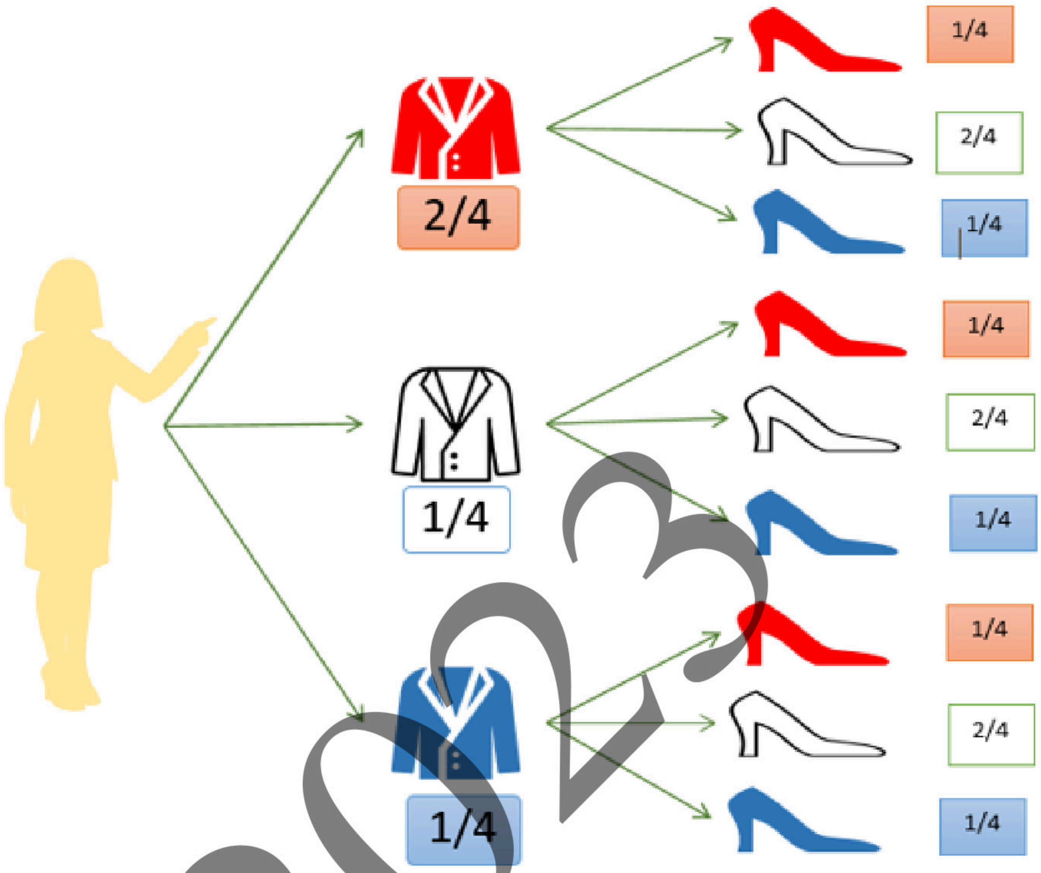
$$a)\ P(CARLOS\ DOS\ ASES) = \frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7} = \mathbf{\frac{3}{14}}$$

$$b)\ P(CARLOS\ UN\ AS\ y\ UN\ REY) = \frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7} + \frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7} = \mathbf{\frac{4}{7}}$$

$$c)\ P\left(LUCÍA\ UN\ AS\ y\ CARLOS\ \ DOS\ REYES\ NO\right) = \frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6} + \frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} + \frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} = \mathbf{\frac{5}{14}}$$

$$d)\ P\left(LUCÍA\ \ UN\ REY\right) = \frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6} + \frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} + \frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} + \frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

B.3. *Problema de cálculo de probabilidades.*



a) Calculamos la probabilidad de llevar un traje rojo unos y zapatos blancos:

$$\boldsymbol{P(traje\ rojo\ y\ zapatos\ blancos)} = \frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

b) Calculamos la probabilidad de no ir toda vestida de blanco:

$$P(\boldsymbol{no\ ir\ toda\ vestida\ de\ blanco}) = 1 - P(\ ir\ toda\ vestida\ de\ blanco) = 1 - \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4} =$$

$$= 1 - \frac{1}{8} = \boldsymbol{\frac{7}{8}}$$

c) Calculamos la probabilidad de llevar zapatos azules:

$$\boldsymbol{P(zapatos\ azules\ )} = \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{4}{16} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

d) Calculamos la probabilidad de llevar zapatos azules o blancos:

$$\boldsymbol{P(zapatos\ azules\ o\ zapatos\ blancos)} = 1 - P(zapatos\ rojos) =$$

$$= 1 - \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} = \boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

e) Calculamos la probabilidad de ir vestida totalmente del mismo color.

$$\boldsymbol{P(ir\ vestida\ toda\ del\ mismo\ color)} =$$

$$= P(ir\ vestida\ toda\ de\ rojo) + P(ir\ vestida\ toda\ de\ blanco) + P(ir\ vestida\ toda\ de\ azul) =$$

$$= \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{5}{16}}$$

f) Calculamos la probabilidad de llevar zapatos rojos, sabiendo que no está vestida toda del mismo color.

$$\boldsymbol{P\ (zapatos\ rojos\ /\ no\ está\ vestida\ toda\ del\ mismo\ color)} =$$

$$= \frac{P(zapatos\ rojos\ \cap\ no\ está\ vestida\ toda\ del\ mismo\ color)}{P(no\ está\ vestida\ toda\ del\ mismo\ color)} =$$

$$= \frac{P(vestido\ blanco\ \cap zapatos\ rojos) + P(\ vestido\ azul \cap zapatos\ rojos)}{1 - P(\ está\ vestida\ toda\ del\ mismo\ color\ )} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}{1 - \frac{5}{16}} = \frac{\frac{2}{16}}{\frac{11}{16}} = \boldsymbol{\frac{2}{11}}$$

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

A.4. *Ejercicio sobre la distribución de la media muestral. Intervalo de característico para la media muestral.*

El número de horas semanales que hacen deporte: X

$X \equiv \mathcal{N}(\mu,\ \sigma)$, donde $\mu = 8$; $varianza = 7{,}29$.

A partir de una muestra aleatoria simple de tamaño 36:

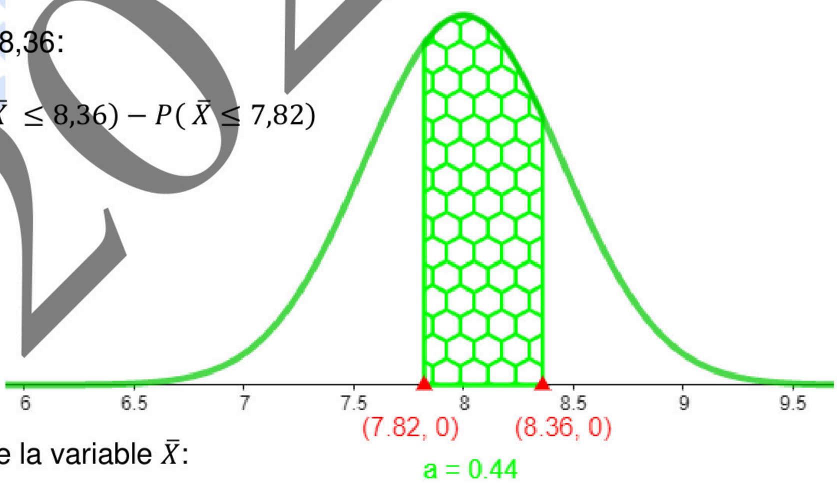
a) Indicamos cuál es la distribución de la media muestral, $\bar{X}$:

- $varianza = \sigma^2 = 7{,}29 \Rightarrow \sigma = \sqrt{7{,}29} = 2{,}7$ y $\mu = 8 \Rightarrow \boldsymbol{X \equiv \mathcal{N}(8,\ 2{,}7)}$
- $X \equiv \mathcal{N}(8,\ 2{,}7) \Rightarrow \bar{X} \equiv \mathcal{N}\left(\mu,\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(8,\ \frac{2{,}7}{\sqrt{36}}\right) = \mathcal{N}(8,\ 0{,}45) \Rightarrow$

$$\boldsymbol{\bar{X} \equiv \mathcal{N}(8,\ 0{,}45)}$$

b) Calculamos la probabilidad de que el número medio de horas semanales dedicadas al deporte esté entre 7,82 y 8,36:

$P(7{,}82 \leq \bar{X} \leq 8{,}36) = P(\bar{X} \leq 8{,}36) - P(\bar{X} \leq 7{,}82)$



- Tipificación de la variable $\bar{X}$:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} = \frac{\bar{X} - 8}{0{,}45} \Rightarrow \boldsymbol{\bar{X} = 0{,}45\,Z + 8}$$

- $P(\bar{X} \leq 8{,}36) = P(0{,}45\,Z + 8 \leq 8{,}36) = P\left(Z \leq \frac{8{,}36-8}{0{,}45}\right) = P(Z \leq 0{,}8) = 0{,}7881$

- $P(\bar{X} \leq 7{,}82) = P(0{,}45\,Z + 8 \leq 7{,}82) = P(Z \leq -0{,}4) = P(Z \geq 0{,}4) =$

$$= 1 - P(Z \leq 0{,}4) = 1 - 0{,}6554 = 0{,}3446$$

Por lo tanto:

$P(7{,}82 \leq \bar{X} \leq 8{,}36) = P(\bar{X} \leq 8{,}36) - P(\bar{X} \leq 7{,}82) = 0{,}7881 - 0{,}3446 = 0{,}4435 \Rightarrow \boldsymbol{44{,}35}\,\%$

c) Determinamos el intervalo característico para el 99 % en la distribución de $\bar{X}$.

- Sabemos que $\bar{X} \equiv \mathcal{N}\,(8, \quad 0{,}45\,)$

$(8-e\,, \quad 8+e)$ *es el intervalo caracteristico para el* $99\,\%$, *si* $P(8-e \le \bar{X} \le 8+e) = 0{,}99$

$$\mathrm{P}(8-\mathrm{e} \le \bar{X} \le 8+\mathrm{e}) = 0{,}99 \Rightarrow \mathrm{P}(\bar{X} \le 8+\mathrm{e}) - \mathrm{P}(\bar{X} \le 8-\mathrm{e}) = 0{,}99 \Rightarrow$$

- TIPIFICACIÓN:

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} = \frac{\bar{X}-8}{0{,}45} \Rightarrow \bar{X} = 0{,}45\,Z + 8$$

- $P(\bar{X} \le 8+e) = P(0{,}45\,Z + 8 \le 8+e) = P(0{,}45\,Z \le e) =$

$$= P\left(Z \le \frac{e}{0{,}45}\right)$$

- $P(\bar{X} \le 8-e) = P(0{,}45\,Z + 8 \le 8-e) = P(0{,}45\,Z \le -e) =$

$$= P\left(Z \le \frac{-e}{0{,}45}\right) = 1 - P\left(Z \le \frac{e}{0{,}45}\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}(8-\mathrm{e} \le \bar{X} \le 8+\mathrm{e}) = P\left(Z \le \frac{e}{0{,}45}\right) - \left[1 - P\left(Z \le \frac{e}{0{,}45}\right)\right] = 0{,}99 \Rightarrow$$

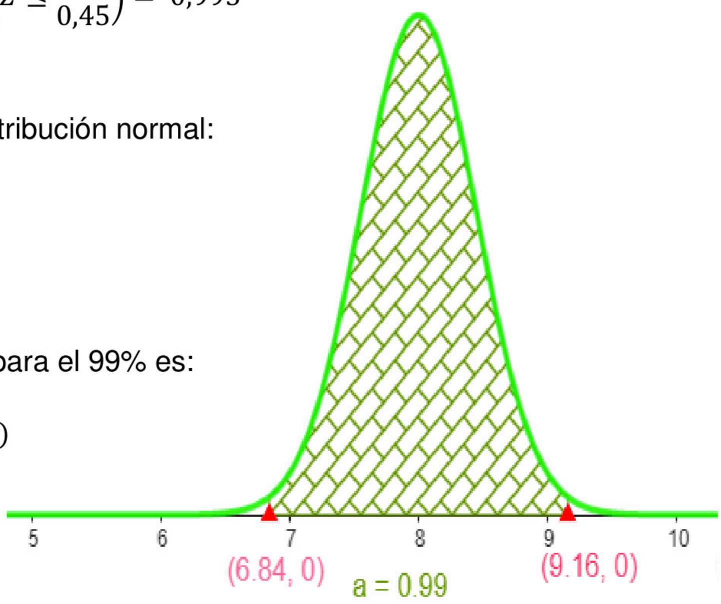
$$\Rightarrow 2\,P\left(Z \le \frac{e}{0{,}45}\right) - 1 = 0{,}99 \Rightarrow P\left(Z \le \frac{e}{0{,}45}\right) = 0{,}995$$

Entonces, mirando en la tabla de la distribución normal:

$$\frac{e}{0{,}45} = 2{,}575 \Rightarrow \boldsymbol{e = 1{,}15875}$$

Por lo tanto, el intervalo característico para el 99% es:

$$(8-\mathrm{e}\,, \quad 8+e) = (\mathbf{6{,}8412}\,, \quad \mathbf{9{,}1587})$$



B.4. *Cálculo del intervalo de confianza para la proporción de una población y error máximo admisible.*

a) Estimamos el porcentaje de estudiantes de esa universidad que aprueban todas las asignaturas, con un nivel de confianza del 97 %.

- Si el tamaño de muestra n es grande, la distribución de la proporción muestral es:

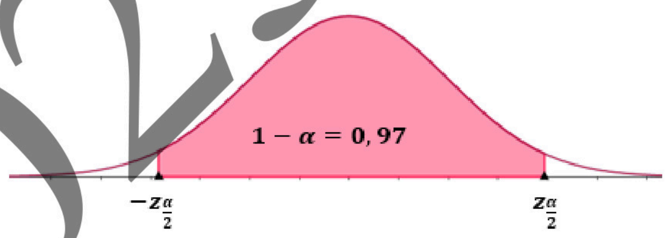
$$\mathcal{N}\left(\mu = p\,, \sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}}\right).$$

- En la muestra de 400 estudiantes, 160 han aprobado todas las asignaturas, entonces la proporción muestral de estudiantes que han aprobado todas las asignaturas es:

$$\boldsymbol{\hat{p} = \frac{160}{400} = 0,4}$$

- El intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que ha aprobado todas las asignaturas con un nivel de confianza del 97 % es:

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\,, \quad \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$$



- Calculamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$.

Nivel de confianza: $n_c = 0,97 = 1-\alpha \Rightarrow \alpha = 0,03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,015 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,17$

$$P\left(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,015 \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,015 \Rightarrow P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,985 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,17$$

- $\hat{p} = 0,4 \Rightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,6 \Rightarrow$

$$\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = \sqrt{\frac{0.4\ \cdot 0,6}{400}} = 0,0245$$

Entonces:

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\,, \quad \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) = (0,4 - 2,17\cdot 0,0245,\ \ 0,4 + 2,17\cdot 0,0245) =$$

$$= (\mathbf{0,3468}, \quad \mathbf{0,4531})$$

Por lo tanto, el porcentaje de estudiantes de la universidad que ha aprobado todas las asignaturas está entre el 34,68 % y el 45,31 % con un nivel de confianza del 97 %.

b) Calculamos el error máximo admisible para dicho nivel de confianza.

El error máximo admisible con un nivel de confianza del 97 % para la estimación de la proporción es:

$$\boldsymbol{e_m} = Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2{,}17 \cdot 0{,}0245 = \mathbf{0,05315} \quad \Rightarrow \mathbf{5,31}\ \%$$

OTRA MANERA

Una vez hecho el apartado a), el error máximo admisible es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza, esto es:

$$e_m = \frac{0{,}4531 - 0{,}3468}{2} = 0{,}05315 \Rightarrow \mathbf{5,31}\ \% \Rightarrow \%\ \mathbf{5,31}$$

c) Calculamos el tamaño de la muestra para que $e_m = 0{,}04$, con un nivel de confianza del 97 %.

$$e_m = 0{,}04 = Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2{,}17 \cdot \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0{,}6}{n}} \implies 0{,}04 \cdot \sqrt{n} = 2{,}17 \cdot \sqrt{0.4 \cdot 0{,}6} \implies$$

$$\implies \sqrt{n} = 2{,}17 \cdot \frac{\sqrt{0{,}24}}{0{,}04} \implies n = \frac{2{,}17^2 \cdot 0{,}24}{0{,}04^2} = 706{,}33 \implies \boldsymbol{n} = \mathbf{707}$$

Por lo tanto, la muestra ha de tener como mínimo 707 estudiantes para que el error máximo admisible sea 0,04, con un nivel de confianza del 97 %.